BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

L'avenir en perspective

CONCOURS 2025
Programme des classes préparatoires

Filière économique et commerciale
voie générale (ECG)
voie technologique (ECT)

Filière littéraire
voie B/L Lettres et Sciences Sociales
voie BEL (ENS Ulm A/L et ENS de Lyon)

Depuis 1991, la Direction des admissions et concours de la CCI Paris Île-de-France est l’opérateur de la Banque commune d’épreuves des écoles de management (BCE). Dans ce cadre, elle met chaque année à la disposition des candidats, des préparateurs et des écoles une brochure contenant les programmes des classes préparatoires à partir desquels sont établies les épreuves du concours.

Élaborés par les services du Ministère de l’Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, avec la contribution des écoles, les programmes, tant ceux de la filière économique et commerciale que ceux des filières littéraires, ont été publiés au fil des années dans différents numéros du Bulletin Officiel de l’Education Nationale. Certains thèmes, renouvelés à chaque concours, font l'objet d'une publication annuelle dans le BOEN.

La présente brochure réunit l’ensemble des programmes applicables au concours 2025 en un unique volume, permettant aux publics concernés d’avoir une vision générale des connaissances et des compétences demandées aux élèves préparant l’entrée dans les grandes écoles de management.

Nous espérons que cette brochure sera pour tous un outil de travail utile et, au seuil de cette nouvelle année scolaire, nous souhaitons beaucoup de réussite aux candidats et à leurs professeurs.

Valérie AILLAUD
Directrice des Admissions et
Concours

Programmes des classes préparatoires aux grandes écoles

Les programmes présentés dans cette brochure sont les programmes officiels.

Les programmes des classes préparatoires économique et commerciale sont regroupés dans le Bulletin officiel spécial n°1 du 11 février 2021 du Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche.

Programmes des classes préparatoires économique et commerciale aux grandes écoles voie générale

Arrêté du 5-1-2021 - JO du 7-2-2021 (NOR : ESRS2035776A)

Programmes des classes préparatoires économique et commerciale aux grandes écoles voie technologique

Arrêté du 28-1-2021 - JO du 7-2-2021 (NOR : ESRS2035788A)

Programme de culture générale des classes préparatoires économiques et commerciales aux grandes écoles voie générale et voie technologique

Thème : arrêté du 28-06-2024 - BO 18-07-2024 (NOR : ESRS2418418A)

Objectifs de formation des classes préparatoires littéraires aux grandes écoles voie B/L

Arrêté du 25-3-13 - J.O. du 30-4-13 (NOR : ESRS1306089A)
Arrêté du 25-11-16 - J.O du 21-12-16 (NOR : MENS1633595A)
Arrêté du 16-03-17 - J.O du 31-03-17 (NOR : MENS1701047A)

Objectifs de formation des classes préparatoires littéraires aux grandes écoles

Arrêté du 4-4-2013 - J.O. du 30-4-2013 (NOR : ESRS1306088A)

SOMMAIRE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe I
Programmes de mathématiques appliquées - informatique

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG 1ère année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :

- une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthése, ...) ;
- l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;
- une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC est celui du cours de mathématiques complémentaires de la classe de terminale. Le programme de mathématiques appliquées s'inscrit dans le même esprit, résolument tourné vers l'utilisation d'outils mathématiques et informatiques pour résoudre des problématiques concrètes, tout en maintenant un apprentissage mathématique solide et rigoureux. On privilégie autant que possible les références aux autres disciplines pour motiver l'introduction d'outils mathématiques ou informatiques et en souligner l'efficacité.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du cours de spécialité mathématiques de la classe de première et du cours de mathématiques complémentaires de terminale, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordé par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle. L'espace vectoriel, comme objet abstrait, n'est pas au programme.
- La théorie des graphes est un outil de modélisation très utilisé. Elle permet de mettre en œuvre le calcul matriciel et de le mettre en situation sur des algorithmes.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples pathologiques. On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.
  L'étude des séries va permettre l'étude des variables aléatoires discrètes. Celle des intégrales généralisées n'est pas au programme de la première année. Il est à noter que, dans ce programme, les comparaisons des suites, séries et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalents ne seront traitées qu'en seconde année.
- Les équations différentielles sont présentées dans le cadre d'études de phénomènes d'évolution en temps continu, adossées si possible à leur version discrète en termes de suites. On met en avant les aspects mathématiques de la notion d'équilibre.
- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en terminale.
  On considèrera des espaces probabilisés finis au premier semestre, plus généraux au second semestre.
- L'algorithmique s'inscrit naturellement dans la démarche de résolution de problèmes. Les activités de programmation qui en résultent constituent un aspect essentiel de l'apprentissage de l'informatique. Des exemples ou des exercices d'application sont choisis pour leur intérêt dans les autres disciplines ou pour leur importance stratégique (l'analyse de données).

L'utilisation du langage Python est enseigné tout au long de l'année en lien direct avec le programme. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de visualiser concrètement les résultats obtenus grâce aux concepts et outils mathématiques enseignés et de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple l'analyse de graphes, de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse, du traitement de calculs matriciels en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales, ...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et la spécialité choisie en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme admis, la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Ce chapitre présente des points de vocabulaire, des notations, ainsi que certains types de raisonnement (par l'absurde, par contraposée, par récurrence...) et de démonstrations (d'implications, d'équivalences, d'inclusions...) dont la maîtrise s'avère indispensable à une argumentation rigoureuse sur le plan mathématique.

Le contenu de ce chapitre ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique. Les notions seront introduites progressivement au cours du semestre en utilisant celles déjà acquises au lycée, et à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés, pourront être renforcées au-delà, en fonction de leur utilité.

1 - Eléments de logique

Les étudiants doivent savoir :

• utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;

• utiliser à bon escient les quantificateurs universel et existentiel ; repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

Notations : $\exists$, $\forall$.
Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs à des fins d'abréviation est exclu.

• distinguer dans le cas d'une proposition conditionnelle la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;

• utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;

• formuler la négation d'une proposition ;

• utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;

• reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

2 - Raisonnement par récurrence

Apprentissage et emploi du raisonnement par récurrence.

On commence par le mettre en œuvre sur des exemples élémentaires. Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Notations $\sum$, $\prod$.	Illustration par manipulation de sommes et de produits. ▶ Formules donnant : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou de $\mathbf{N}^2$.

3 - Ensembles, applications

L'objectif de cette section est d'acquérir ou de consolider le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance. Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Réunion. Intersection.	On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »).
Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.	Le complémentaire d'une partie A de E est noté $\bar{A}$.
Produit cartésien.	On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition.	
Composition. Injection, surjection, bijection, application réciproque.	Ces notions seront introduites sur des exemples simples, toute manipulation trop complexe étant exclue. La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.
Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires

L'objectif de cette partie du programme est :
– d'une part d'initier au calcul matriciel afin de permettre la résolution de problèmes issus, notamment, des probabilités ;
– d'autre part de parvenir à une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires et de les interpréter sous forme matricielle.
L'étude de ce chapitre sera menée en lien avec l'informatique. ▶
On introduit la problématique des systèmes linéaires, puis on présente l'utilité de l'écriture matricielle en utilisant des exemples simples de tableaux entrée-sortie ou des tableaux de Leontieff.

Tout développement théorique est hors programme.

1 - Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire.	
Système homogène, système de Cramer.	
Résolution par la méthode du pivot de Gauss.	La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On donnera des exemples où il existe une solution unique, où il n'existe pas de solution et où il existe plusieurs solutions.
Ensemble des solutions d'un système linéaire.	On insiste sur les propriétés de stabilité de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en vue de l'introduction de la notion de sous-espace vectoriel au second semestre

2 - Calcul matriciel

a) Définitions

Définition d'une matrice réelle à n lignes et p colonnes. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Matrices colonnes, matrices lignes. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Matrices triangulaires, diagonales. Matrice identité.	
Transposée d'une matrice. Matrices symétriques.	Notation ${}^tA$. On caractérisera les matrices symétriques à l'aide de la transposée.

b) Opérations matricielles

Somme, produit par un nombre réel, produit. Propriétés des opérations. Transposée d'une somme, d'un produit de matrices carrées.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. $\boxed{\blacktriangleright}$
Opérations sur les matrices carrées ; puissances.	Exemples de calcul des puissances n-èmes d'une matrice carrée ; application à l'étude de suites réelles satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. $\boxed{\blacktriangleright}$ La formule du binôme n'est pas un attendu du programme du premier semestre.
Matrices inversibles. Inverse d'un produit.	On admettra que pour une matrice carrée, un inverse gauche ou droit est l'inverse.

Écriture matricielle $AX = Y$ d'un système linéaire.
Unicité de la solution lorsque la matrice A est inversible.

On pourra illustrer sur des exemples la recherche de l'inverse d'une matrice A par résolution du système $AX = Y$.
Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.
Exemples d'utilisation d'un polynôme annulateur pour déterminer l'inverse.

Déterminant d'une matrice $(2, 2)$.

Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.

III - **Théorie des graphes**

Un graphe fini est un outil simple et efficace de modélisation. Les graphes sont utilisés en sciences sociales pour la modélisation des réseaux sociaux et en économie pour des modèles d'évolution. On introduit des exemples importants comme le graphe du web ou ceux de différents réseaux sociaux en indiquant dans la mesure du possible la taille. Un graphe est peut être représenté par sa matrice d'adjacence et le calcul matriciel en permet une analyse qui peut s'interpréter concrètement. Cette analyse est choisie en première approche ▶ *.*

Graphes, sommets, sommets adjacents, arêtes.

Un graphe peut être orienté ou non.

Matrice d'adjacence.

La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.
On donne des exemples (graphe eulérien, graphe complet,...) avec leurs matrices.

Chaîne (chemin). Longueur d'une chaîne (d'un chemin).
Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G, le $(i, j)-$ème coefficient de la matrice A^d est le nombre de chemins de longueur d du sommet i au sommet j.

Graphe connexe.

Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G à n sommets, A est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + \cdots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Degré d'un sommet.

Formule d'Euler (dite des poignées de main).

Analyse des réseaux sociaux

On introduira sur des exemples simples quelques mesures utilisées dans l'analyse de réseaux sociaux et leur interprétation (recherche d'influenceurs...) comme le degré de centralité ou le degré d'intermédiarité de chaque sommet. Ces notions ne sont pas exigibles.

IV - **Suites de nombres réels**

L'étude des suites numériques au premier semestre permet aux étudiants de consolider la notion de suite réelle et de convergence abordée en classe terminale. Tout exposé trop théorique sur ces notions est à exclure.
Cette première approche des suites élargit la conception de la notion de fonction.
Les calculs d'intérêts, d'amortissement ou de multiplicateurs keynesiens peuvent les mettre en situation.
L'étude des suites classiques pourra être motivée puis se faire en lien étroit avec la partie probabilités

pour mettre en avant l'utilité de cet outil numérique.
On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en particulier pour illustrer la notion de convergence. ▶

1 - Généralités sur les suites réelles

Définitions, notations.
Exemples de définitions : par formules récursives ou explicites, par restriction d'une fonction de variable réelle aux entiers.

2 - Suites usuelles : formes explicites

Suite arithmétique, suite géométrique.

Formule donnant $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.

Suite arithmético-géométrique.

Les étudiants devront savoir se ramener au cas d'une suite géométrique.

Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.

On se limitera au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. ▶

3 - Convergence d'une suite réelle

Aucune démonstration concernant les résultats de cette section n'est exigible.

Limite d'une suite, suites convergentes.

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, élément de $\mathbf{R}$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient les termes u_n pour tous les indices n, hormis un nombre fini d'entre eux.

Généralisation aux limites infinies.
Unicité de la limite.
Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Aucune technicité sur ces opérations ne sera exigée.

Existence d'une limite par encadrement.
Suites monotones.
Théorème de la limite monotone.

Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge.
Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) .

Suites adjacentes.

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers une même limite ℓ, la suite (u_n) converge vers ℓ.

4 - Comportement asymptotique des suites usuelles

Croissances comparées.	Comparaison des suites (n^a), (q^n), $((\ln(n))^b)$. Résultats admis.

V - **Fonctions réelles d'une variable réelle**

Il s'agit, dans ce chapitre, de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et quelques théorèmes sur les fonctions d'une variable réelle. On utilisera autant que possible la représentation graphique des fonctions pour illustrer ou conjecturer ces résultats, qui prennent tout leur sens dans une synthèse récapitulative.
Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles et à celles qui s'en déduisent de façon simple. On se restreindra aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$. Les fonctions trigonométriques sont hors programme.
L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Compléments sur les fonctions usuelles

a) Fonctions polynômes

La construction des polynômes formels n'est pas au programme. On confond un polynôme avec sa fonction polynomiale.

Degré, somme et produit de polynômes.	Par convention, $\deg 0 = -\infty$.
Ensemble $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$, ensembles $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n.	
Racines d'un polynôme. Factorisation par $(x-a)$ dans un polynôme ayant a comme racine.	Application : un polynôme de $\mathbf{R}_n[x]$ admettant plus de $n+1$ racines distinctes est nul. Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. ▶
Trinômes du second degré.	Discriminant d'un trinôme du second degré. Factorisation dans le cas de racines réelles. Lorsqu'il n'y a pas de racine réelle, le signe du trinôme reste constant sur $\mathbf{R}$. Relation entre les coefficients du polynôme et la somme et le produit des racines. Relation entre les signes des coefficients du polynôme et les signes de ses racines.

b) Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$

Définitions ; notations, propriétés, représentations graphiques.	On fera une étude détaillée des fonctions puissances. Les étudiants doivent connaître les règles de calcul sur les puissances.

c) Fonction valeur absolue

Définition. Propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance sur **R**.
On insistera sur la fonction valeur absolue.

d) Fonction partie entière

Définition. Représentation graphique.

Notation $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.
La notation E est réservée à l'espérance mathématique.

e) Fonctions logarithme et exponentielle

Rappel des propriétés. Positions relatives des courbes représentatives de $\ln, \exp, x \longmapsto x$.

Par le biais d'exercices, étude de fonctions du type $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$.

2 - Limite et continuité d'une fonction en un point

Définition de la limite d'une fonction en un point et de la continuité d'une fonction en un point.
Unicité de la limite.
Limite à gauche, limite à droite. Extension au cas où la fonction est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.

On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur un intervalle I, x_0 étant un réel élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de **R**, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$; dans ce cas, lorsque x_0 appartient à I, cela signifie que f est continue au point x_0 et, dans le cas contraire, que f se prolonge en une fonction continue au point x_0.

Opérations algébriques sur les limites.
Compatibilité du passage à la limite avec les relations d'ordre.
Existence d'une limite par encadrement.
Limite d'une fonction composée.
Si f est une fonction définie sur un intervalle I admettant une limite ℓ en un point x_0, et si (u_n) est une suite d'éléments de I convergeant vers x_0, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Études asymptotiques des fonctions exponentielle et logarithme.

Comparaison des fonctions exponentielle, puissance et logarithme au voisinage de $+\infty$ et des fonctions puissance et logarithme au voisinage de 0.

Croissances comparées

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a |\ln(x)|^b$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |x|^a \mathrm{e}^{bx}$.

Les notions d'équivalence et de négligeabilité ne seront abordées qu'en deuxième année.

3 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

On insistera sur les représentations graphiques. On s'appuiera sur les fonctions de référence pour illustrer les notions de cette section.

Fonctions paires, impaires. Fonctions majorées, minorées, bornées. Fonctions monotones.	
Théorème de la limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle. Opérations algébriques, composition.	
Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Résultat admis. Notations : $\max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ et $\min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$. On illustrera ces résultats par des représentations graphiques et on montrera comment les mettre en évidence sur un tableau de variations.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
Continuité et sens de variation de la fonction réciproque. Représentation graphique de la fonction réciproque.	On utilisera ces résultats pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. ▶.

4 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle. Régionnements du plan

Il s'agit de revenir et d'utiliser les notions du paragraphe d'analyse en les illustrant sur des exemples. On pourra utiliser quelques exemples issus du cours de micro-économie (modèle de l'équilibre entre offre et demande, économies d'échelle...) ▶

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Etude locale, variations, monotonie ou convexité.
Positions relatives de deux courbes.	On pourra utiliser des exemples issus du cours de micro-économie, comme la loi de l'offre et la demande, et donner des interprétations de déplacement des courbes.
Représentations graphiques dans le plan de l'ensemble des solutions d'une inéquation du type $y > f(x)$ ou $y \geqslant f(x)$.	Exemples de régionnements.

VI - **Probabilités et stastistiques**

1 - Stastistiques univariées

a) Généralités

La plupart des notions abordées dans ce paragraphe ont été abordées les années précédentes. Il s'agira ici d'encourager les étudiants à choisir les représentations graphiques et les indicateurs étudiés pour leur pertinence et de travailler leur esprit critique. L'enseignement de ce chapitre doit impérativement avoir lieu en lien étroit avec l'informatique afin de manipuler des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales. ▶

Introduction.	On introduira brièvement le chapitre en expliquant les rôles des différentes étapes d'une étude statistique : statistique descriptive, statistique inférentielle.
Population, individu, échantillon, variable statistique. Variable quantitative discrète, continue, variable qualitative.	Il s'agit ici d'introduire le vocabulaire adapté pour l'étude d'une série statistique.
Série statistique associée à un échantillon.	Série statistique de taille n portant sur un caractère. n-uplet des observations.

b) Etude d'une variable quantitative discrète

Dans cette section, les séries statistiques étudiées seront des séries quantitatives discrètes.

Description d'une série statistique discrète : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.	Diagramme des fréquences cumulées.
Fonction de répartition et quantiles.	Boîte à moustaches. (on pourra comparer des échantillons grâce au résumé de leurs séries statistiques).
Indicateurs de tendance centrale : moyenne $\bar{x}$ et médiane d'une série statistique. Définitions et propriétés de la moyenne et de la médiane.	Propriétés de la moyenne et la médiane par transformation affine.
Caractéristiques de dispersion : étendue, écart interquartile.	On discutera selon les données étudiées de la pertinence des différents indicateurs choisis.
Variance s_x^2 et écart-type s_x d'une série statistique : définitions et propriétés. Formule de Koenig.	Pour un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ on définit la variance empirique par : $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

2 - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables.	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples où l'univers Ω des résultats possibles est fini, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.

Événements, événements élémentaires, opérations sur les événements, événements incompatibles.

On fera le lien entre ces opérations sur les événement et les connecteurs logiques.

Système complet d'événements fini.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les deux conditions suivantes :
• $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
• $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

3 - Coefficients binomiaux

Factorielle, notation $n!$.

Interprétation de $n!$ en tant que nombre de bijections d'ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments $\boxed{\blacktriangleright\ .}$

Coefficients binomiaux, notation $\dbinom{n}{p}$.

Nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.

Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Relation $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

Formule du triangle de Pascal.

La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul efficace pour le calcul numérique des coefficients binomiaux. $\boxed{\blacktriangleright}$

$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

On pourra démontrer cette formule par récurrence à partir de la formule du triangle de Pascal.

4 - Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

On restreint, la notion de probabilité à une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant :
• pour tous A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A\cap B = \emptyset$, $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
• $P(\Omega) = 1$.
Cas de l'équiprobabilité.

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Généralisation à la réunion de 3 événements.

5 - Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.

Notation P_A.

Formule des probabilités composées.

• Si $P(A) \neq 0,\ P(A\cap B) = P(A)P_A(B)$.
• Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$,
$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$.

Formule des probabilités totales

Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.
Si de plus, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $P(A_i) \neq 0$, on a : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.

Formule de Bayes.

On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

6 - Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.

Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Indépendance mutuelle de n événements ($n \in \mathbf{N}^*$).
Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

I - L'espace $\mathbf{R}^n$, sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Ce chapitre ne doit pas donner lieu à un exposé théorique ; on donne ici une approche concrète à des notions. Pour simplifier ce premier contact, l'étude se limitera à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, en privilégiant les exemples pour $n \in \{2, 3, 4\}$.

a) Espace $\mathbf{R}^n$

Définition de $\mathbf{R}^n$.
Loi interne $+ : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.
Loi externe $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.
Propriétés d'associativité et de distributivité.
Combinaisons linéaires.

On privilégiera le travail sur les espaces $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4$.
On introduira un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ comme matrice des coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ dans la base canonique.

Base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Les espaces vectoriels ci-dessus sont naturellement équipés de leur base canonique.

b) Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$.	Un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs. On remarque qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est stable par combinaisons linéaires. On classifiera les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel.	On reviendra sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à $2, 3, 4$ inconnues.
Sous-espace vectoriel engendré.	Notation $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	
Base d'un sous-espace vectoriel.	$(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base du sous-espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
Si un sous-espace vectoriel admet une base constituée de p vecteurs, toute autre base a p vecteurs. Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.	Théorème admis.
Famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension n. Résultats admis.	Cardinal d'une famille libre (respectivement génératrice) d'un sous-espace vectoriel de dimension n.
Une famille libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension n est une base.	Résultats admis.
Rang d'une famille de vecteurs.	

c) Applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$.

Noyau.	Le noyau d'une matrice est un sous-espace vectoriel.
Rang d'une matrice.	Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.	Résultat admis.
Etude de l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ définie par une matrice M.	$(X \to MX)$
Composition.	Produit matriciel.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Théorème du rang.	Résultat admis.

II - Calcul différentiel et intégral

Le but de ce chapitre est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions.
Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Calcul différentiel

a) Dérivation

Dérivée en un point. Tangente au graphe en un point. Dérivée à gauche, à droite.	Notation $f'(x)$. $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$. On fera le lien entre cette formule et l'équation de la tangente au point x. Limites des taux d'accroissement de la fonction exponentielle, de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et des fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée.	Notation f'.
Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions puissances. Dérivée des fonctions composées.	On évitera tout excès de technicité dans les calculs de dérivées.
Inégalités des accroissements finis.	Si $\lvert f'\rvert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2, \quad \lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant k\lvert b-a\rvert$. Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $\lvert f'\rvert \leqslant k < 1$. $\boxed{\blacktriangleright}$ Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.	Résultat admis. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Extremum local d'une fonction dérivable.	Une fonction f, dérivable sur un intervalle ouvert I, admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.

b) Dérivées successives

Fonctions 2 fois dérivables.
Fonctions de classe C^1, C^2, C^∞.
Opérations algébriques.

c) Convexité

Les fonctions convexes sont des outils de modélisation en économie. On pourra s'appuyer sur un exemple simple (par exemple, une fonction de coût) pour en motiver la définition. Tous les résultats de cette section seront admis. Les fonctions étudiées sont au moins de classe C^2.

Définition d'une fonction convexe.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, $$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$ Interprétation géométrique. ▶
Fonctions concaves. Points d'inflexion.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^2.	Si f est de classe C^2, f est convexe si et seulement si l'une de ces deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • f" est positive ; • C_f est au-dessus de ses tangentes.
Caractérisation des fonctions concaves de classe C^2. Si la dérivée d'une fonction convexe f de classe C^2 sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.	
Représentation graphique d'une fonction convexe.	▶

2 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Allure locale du graphe. Exemples de points d'inflexion.

3 - différentielles linéaires à coefficients constants.

Les modèles mathématiques utilisés pour étudier des phénomènes dynamiques peuvent être à temps discret ou à temps continu. La problématique de modélisation en temps continu sera mise en place à l'aide des équations différentielles linéaires à coefficients constants. On donnera l'exemple de l'équation différentielle logistique sans insister sur les difficultés techniques, en lien avec le modèle de Solow. On introduit la notion d'équilibre, une situation qui n'évolue pas et qu'on obtient le plus souvent comme l'aboutissement du phénomène évolutif.

Résolution de $y' + ay = b(t)$ où a est un nombre réel et b est une fonction continue sur un intervalle de **R** .	Cas particulier où b est constante.
Équation homogène, solution particulière.	On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.
Résolution de $y'' + ay' + by = c$ où a, b et c sont des nombres réels. Équation homogène, solution particulière.	On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.

Exemples de résolution d'équations $y'' + ay' + by = c(t)$ où a, b et c est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$.

On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles.

Principe de superposition.

La recherche d'une solution particulière doit être accompagnée.

Trajectoires.

On remarque qu'une trajectoire est uniquement déterminée par ses conditions initiales et que deux trajectoires différentes sont d'intersection vide. ▶

Équilibre.

Une trajectoire d'équilibre est constante.
On constatera sur des exemples que si une trajectoire converge lorsque t tend vers $+\infty$, elle converge vers un équilibre. ▶

4 - Intégration sur un segment

On introduit ce chapitre en rappelant le lien entre la notion de primitive et l'aire sous la courbe estimée par la méthode des rectangles vue en terminale.

a) Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.

Dans le cas où f est continue monotone, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet f pour dérivée.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.
Toute fonction continue sur un intervalle admet, sur cet intervalle, au moins une primitive.

Admis.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Relation de Chasles.

Si f est continue sur un intervalle I, pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

b) Propriétés de l'intégrale

Linéarité de l'intégrale.
L'intégrale d'une fonction positive sur un segment est positive.
L'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur le segment.

Si $a \leqslant b$,

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

Résultat admis
On enseignera aux étudiants à majorer et à minorer des intégrales par utilisation de cette inégalité ou par intégration d'inégalités.

c) Techniques de calcul d'intégrales

On évitera tout excès de technicité pour les calculs d'intégrales par changement de variable.

Calcul de primitives « à vue », déduites de la reconnaissance de schémas inverses de dérivation.

On insistera sur le modèle $u'(x)u(x)^\alpha$ ($\alpha \neq -1$ ou $\alpha = -1$).

Intégration par parties. Changement de variables.

On se restreindra à des changements de variables C^1 strictement monotones.
Les changements de variables autres qu'affines seront précisés dans les exercices.
On pourra à titre d'exemples étudier des suites définies par une intégrale et des fonctions définies par une intégrale.

III - **Étude élémentaire des séries**

Ce chapitre fait suite au chapitre sur les suites numériques réelles du premier semestre, une série étant introduite comme une suite de sommes partielles. Aucune technicité n'est exigible en première année. L'étude des variables aléatoires discrètes sera l'occasion d'une mise en œuvre naturelle de ces premières connaissances sur les séries. L'étude des séries sera complétée en seconde année par les techniques de comparaison sur les séries à termes positifs.

1 - Séries numériques à termes réels

Série de terme général u_n.
Sommes partielles associées.

Définition de la convergence.
Combinaison linéaire de séries convergentes.

$\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si $\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
On pratiquera, sur des exemples simples, l'étude des séries (convergence, calcul exact ou approché de la somme).
On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n).
▶

Série à termes positifs.

Convergence absolue.

En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

La convergence absolue implique la convergence.

Résultat admis.

2 - Séries numériques usuelles

Étude des séries $\sum q^n, \sum nq^{n-1}$, $\sum n(n-1)q^{n-2}$ et calcul de leurs sommes.	
Convergence et somme de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$.	Résultats admis.

IV - **Probabilités - Variables aléatoires réelles**

Dans ce chapitre, on généralise l'étude faite au premier semestre ; le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.
L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. ▶
L'étude des variables aléatoires discrètes se fera dans la mesure du possible en tant qu'outil de modélisation de problèmes concrets.

1 - Espace probabilisé

On généralisera dans ce paragraphe l'étude effectuée lors du premier semestre sans soulever de difficultés théoriques.

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.	L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union, par intersection dénombrable et par passage au complémentaire.
Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω. Généralisation de la notion de probabilité.	
Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω. Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle. Généralisation de la formule des probabilités composées. Généralisation de la formule des probabilités totales. Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.	

2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles

Définition d'une variable aléatoire réelle.	X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si X est une application de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout élément x de $\mathbf{R}$, $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$. Démontrer que X est une variable aléatoire ne fait pas partie des exigibles du programme. Notations $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.	

3 - Variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans R

Définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$.	L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.	
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limite à des cas simples, tels que $g \ : \ x \longmapsto ax + b$, $g \ : \ x \longmapsto x^2, \dots$

b) Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition de l'espérance.	Quand $X(\Omega)$ est infini, une variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente. Notation $\mathrm{E}(X)$.
Linéarité de l'espérance. Positivité.	Résultats admis.
Variables aléatoires centrées.	
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $\mathrm{E}(g(X))$ existe si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ converge absolument, et dans ce cas $\mathrm{E}(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$.	
Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$.

Formule de Kœnig-Huygens. $V(aX+b) = a^2 V(X)$.	$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
Variables aléatoires centrées réduites.	On notera X^* la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

4 - Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Loi certaine.	Caractérisation par la variance.
Loi de Bernoulli. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
Loi binomiale. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Application : formule du binôme de Newton donnant $(a+b)^n$.	Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.
Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b) \in \mathbf{N}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. $\boxed{\blacktriangleright}$

b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique (rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. $\boxed{\blacktriangleright}$ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \forall k \in \mathbf{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.
Loi de Poisson. Espérance, variance Contexte d'utilisation.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On pourra remarquer que la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est loi « limite » (cette notion sera précisée en deuxième année) d'une suite de variables suivant la loi binomiale $B(n, \frac{\lambda}{n})$. $\boxed{\blacktriangleright}$

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - Programme du premier semestre.

Les séances de travaux pratiques du premier semestre poursuivent les objectifs suivants :

— *consolider l'apprentissage de la programmation qui a été entrepris dans les classes du lycée en langage Python ;*
— *mettre en place une discipline de programmation : découpage modulaire à l'aide de fonctions et programmes, annotations et commentaires, évaluation par tests ;*
— *mettre en pratique des algorithmes facilitant le traitement de l'information, la modélisation, la simulation.*

1 - Algorithmique des listes

Il s'agit de présenter des algorithmes simples, spécifiés de façon abstraite, puis de les traduire dans un langage de programmation, ici Python. On utilisera ces activités pour construire une progression pour assimiler les notions de variables, de type, d'affectation, d'instruction conditionnelle, de boucles conditionnelles ou inconditionnelles et manipuler de façon simple les listes en Python. S'il n'est pas souhaitable de les formaliser, on dégagera de l'étude de ces algorithmes simples les problématiques de la correction et la terminaison des algorithmes. Ces notions ne sont pas exigibles.

Recherche séquentielle dans une liste.	Recherche d'un élément. Recherche du maximum, du second maximum.
Algorithmes opérant sur une structure séquentielle par boucles imbriquées.	Recherche des deux valeurs les plus proches dans une liste.
Algorithmes dichotomiques.	Recherche dichotomique dans une liste triée.
Algorithmes gloutons.	Rendu de monnaie. Allocation de salles pour des cours.

2 - Statistiques descriptives et analyse de données.

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques publiques obtenues sous forme d'un fichier csv (Comma-separate-value). Pour ce faire, on pourra utiliser le site data.gouv ou le site de l'Insee et choisir des données socio-économiques. On travaille directement sur le fichier de données sous forme de table en important la bibliothèque `pandas` *ou après transformation directement sur un tableur. On indiquera aux étudiants les commandes à utiliser. Aucune de ces commandes de cette bibliothèque n'est exigible.*

Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	
Exemples d'analyse des données.	On pourra faire des tris sélectifs, donner des exemples de calculs d'indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles. ou d'indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile. On discutera la signification des résultats obtenus.
Représentations des données. Diagrammes en bâtons, histogrammes.	On pourra utiliser la bibliothèque `matplotlib`.

3 - Approximation numérique

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.

On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).

II - Programme du deuxième semestre.

1 - Graphes finis, plus courts chemins

Il s'agit de revenir sur le modèle des graphes et d'étudier les démarches algorithmiques permettant de les analyser selon leurs représentations.

Graphes.

Un graphe est implémenté à l'aide de listes d'adjacence (rassemblées par exemple dans une liste ou dans un dictionnaire) ou par sa matrice d'adjacence.

Recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré avec des poids positifs.
Algorithme de Dijkstra.

2 - Simulation de phénomènes aléatoires

Simulation d'expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.
Simulation de phénomènes aléatoires.

Loi binomiale, loi géométrique.

III - Annexe : Langage Python

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi le paragraphe ci-dessous liste limitativement les éléments du langage Python (version 3 ou supérieure) dont la connaissance est exigible des étudiants. Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation. Il n'y a pas lieu d'introduire en première année les commandes qui relèvent de notions de seconde année.

1 - Types de base

`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *`, `import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

2 - Structures de contrôle

Instruction d'affectation =.

Instruction conditionnelle `if`, `elif`, `else`.

Boucle `for` ; Boucle `while`.

Définition d'une fonction `def` $f(p_1, \dots, p_n)$
`return`.

3 - Listes

Tableau unidimensionnel ou liste.
Définitions d'une liste avec une boucle ou en compréhension.
Fonction `range`.
Commandes `append` , `len`.

Il n'y a pas lieu de distinguer ces deux structures de données en langage Python.

Recherche séquentielle dans une liste.
Commandes `in` `del` `count`.

Manipulations élémentaires de listes.
Commandes + et ∗.

4 - Utilisation de modules, de bibliothèques

`from ... import *, import ... as`

Importation d'une bibliothèque.

Pour le calcul numérique, le traitement statistique ou la simulation de phénomènes aléatoires, certaines bibliothèques s'avèrent utiles. Elles sont listées ci-dessous avec les fonctions pertinentes. Toute utilisation d'une telle fonction doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

a) Dans la bibliothèque `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.array, np.zeros, np.ones, np.eye, np.linspace, np.arange`

Création de vecteurs et de matrices. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.

+	-	*	/	**

Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.

==	>	<	>=	<=	!=

Comparaison de deux matrices (`M == N`), comparaison d'une matrice et d'un nombre (`M>=1`).

`a,b = np.shape(M)`

Taille de la matrice `M`.

`np.dot, np.transpose`

Syntaxes exigibles : `np.transpose(M)`, `np.dot(M1,M2)`. L'usage de méthode comme `M.transpose()`, `M1.dot(M2)` est non-exigible.

`np.sum, np.min, np.max, np.mean, np.cumsum, np.median, np.var, np.std`

Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`

`np.exp, np.log, np.sqrt, np.abs, np.floor`

Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. On pourra utiliser la commande `f = np.vectorize(f)` mais elle n'est pas exigible.

`np.e, np.pi`

b) Dans la librairie `numpy.linalg`

Exemple d'importation : `import numpy.linagl as al`

`al.inv, al.rank, al.matrix_power,`
`al.solve, al.eig`

c) Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random, rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson, rd.exponential, rd.normal, rd.gamma`	On utilisera ces fonctions pour générer un nombre aléatoire ou bien un vecteur ou une matrice à coefficients aléatoires. Exemple : `rd.binomial(10,0.2)`, `rd.binomial(10,0.2,100)`, `rd.binomial(10,0.2,[100,10])`

d) Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes `xlim, ylim, axis, grid, legend` mais elles ne sont pas exigibles.
`plt.hist, plt.bar, plt.boxplot`	Représentations statistiques.
Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires. Simulation d'échantillons de lois usuelles.	On pourra simuler ainsi des lois binomiale et géométrique. On pourra utiliser les fonctions `rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson`

e) Dans la librairie `pandas`

Exemple d'importation : `import pandas as pd`

`pd.read_csv, head, shape, pd.describe`	Pour créer une table à partir du fichier de données et en visualiser ou manipuler une partie.
`pd.mean, pd.std, pd.median, pd.count, pd.sort_values.`	Indicateurs statistiques.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG 2e année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :

— une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...) ;

— l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;

— une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées, vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC option mathématiques appliquées, se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie ou gestion dispensés en Grande École ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- En algèbre linéaire, on introduit les espaces vectoriels de dimension finie : les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle, donc naturellement isomorphes à $\mathbf{R}^n$ pour un certain entier naturel n. L'espace vectoriel, comme objet abstrait n'est pas au programme. Cette définition permet de manipuler les espaces vectoriels usuels et d'introduire la notion d'endomorphisme. On introduit la notion de matrice diagonalisable et on en montre l'intérêt. On évitera des exemples trop calculatoires en privilégiant la compréhension des concepts mathématiques.
  Ces notions d'algèbre linéaire trouveront des applications en analyse lors de l'optimisation des fonctions de deux variables, mais aussi en probabilités (études de chaînes de Markov).
- En analyse, on introduit les intégrales généralisées qui vont permettre l'étude des variables aléatoires à densité. L'outil de comparaison des suites et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalence, s'avère particulièrement efficace pour l'étude des séries et des intégrales généralisées.
  Il est à noter que seuls les développements limités à l'ordre 1 ou 2 sont au programme.
  Au quatrième semestre, l'étude des fonctions de deux variables réelles constitue un prolongement de l'analyse à une variable. Son objectif principal est d'initier les étudiants aux problèmes d'optimisation, cruciaux en économie et en finance.
- Dans la continuité du programme de première année, et en lien avec les résultats sur la réduction des matrices, on étudie les systèmes différentiels linéaires.
- En probabilité, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, on aborde la notion de graphe probabiliste et la chaîne de Markov associée. On introduit les variables aléatoires à densité, avec l'objectif de permettre, en fin de formation, une bonne compréhension des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.
- En informatique, l'analyse de données en tables déjà étudiée en première année se poursuit avec l'étude des bases de données relationnelles et du langage SQL.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. L'algèbre linéaire trouvera ainsi son application dans les problèmes d'optimisation et dans l'étude des chaînes de Markov, l'analyse et les probabilités dans les problèmes d'estimation.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Algèbre linéaire

L'objet de ce chapitre est une étude élémentaire des applications linéaires et des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$*, approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des matrices. L'objectif est d'avoir la possibilité d'utiliser des espaces vectoriels concrets, naturellement isomorphes à* $\mathbf{R}^n$ *et de pouvoir y manipuler les changements de bases, sans introduire les espaces vectoriels abstraits. Cette partie du programme sera ensuite utilisée en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables et en probabilités (chaînes de Markov...).*

1 - Espaces vectoriels réels de dimension finie

Cette partie doit être traitée dans sa plus simple expression. Les notions étudiées en première année sont étendues dans un cadre plus abstrait sans démonstration en s'appuyant sur les exemples de référence listés ci-dessous.

Espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Un espace vectoriel de dimension n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$, d'une opération externe . et d'une bijection de E sur $\mathbf{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.	On se limite par définition au cas de la dimension finie. On illustre ces définitions en liaison avec le programme de première année complété par les espaces vectoriels de référence suivants : $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}_n[x]$.
Familles libres, familles génératrices, bases. Base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[x]$. Sous-espace vectoriel. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.	

2 - Endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre. Endomorphisme, isomorphisme. Composée de deux applications linéaires. Noyau et image d'une application linéaire. Rang d'une application linéaire.	Ecriture matricielle.
Théorème du rang. Application à la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.	Résultat admis.
Matrice associée à une application linéaire dans des bases, matrice d'un endomorphisme.	Lien entre le rang d'une matrice et le rang de l'application linéaire associée. Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.

Changement de base, matrice dee passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.	Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Formules de changement de base.	$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\ P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Matrices semblables.	Deux matrices A et B carrées sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. A et B peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

3 - Réduction des matrices carrées

Le paragraphe est essentiellement consacré à l'introduction des matrices diagonalisables. Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est déconseillée. Ces notions seront mises en situation dans l'étude pratique des suites récurrentes linéaires, de systèmes différentiels, de chaînes de Markov, et pour l'utilisation de la matrice hessienne dans les recherches d'extrema.

Spectre d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(A)$.
Si Q est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de ce polynôme.	Aucune connaissance supplémentaire sur les polynômes annulateurs n'est au programme.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de $\mathbf{R}^n$.	
Matrice carrée diagonalisable.	Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Exemples de diagonalisation de matrices carrées. Sur des exemples, application au calcul de puissances n-ièmes d'une matrice carrée. Exemples de calculs de puissances n-ièmes d'une matrice carrée, non nécessairement diagonalisable, à l'aide de la formule du binôme. Application à l'étude de suites récurrentes linéaires.
Toute matrice symétrique est diagonalisable.	Résultat admis.

II - Compléments d'analyse

1 - Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

On pourra introduire les systèmes différentiels en utilisant un exemple basé sur la loi de l'offre et la demande.

Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réelle.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Résultat admis.

Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable de taille 2 ou 3.

L'exponentielle de matrice n'est pas au programme.

Comportement asymptotique des trajectoires en fonction du signe des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable.
Stabilité des solutions, état d'équilibre.

Équivalence entre une équation scalaire d'ordre 2 et un système de 2 équations d'ordre 1.

On fait le lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année.

2 - Compléments sur les suites et les séries

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

a) Comparaison des suites réelles

Suite négligeable devant une suite, suites équivalentes.

Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.
On réécrira les croissances comparées de première année.
On pratiquera des études du comportement asymptotique de suites.

b) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Etude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

On remarquera le cas où f est croissante.

Notion de point fixe d'une application.
Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si f continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.

On pourra illustrer cette partie du programme avec Python.
$\boxed{\blacktriangleright}$.

c) Compléments sur les séries

L'étude des séries ne s'applique que dans le cadre de l'étude de variables aléatoires discrètes.

Convergence des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Ce résultat pourra être démontré dans le chapitre sur les intégrales généralisées.

Séries à termes positifs. Comparaison des séries à termes positifs dans les cas où $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.	
Exemples d'étude de séries à termes quelconques.	On utilisera la notion de convergence absolue vue en première année. On donne des exemples de sommes télescopiques.

3 - Compléments sur l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle

a) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Fonction négligeable devant une fonction, fonctions équivalentes.	Notations $f = o(g)$ et $f \sim g$ Les théorèmes de croissances comparées vus en première année sont reformulés ici avec les notations de la négligeabilité. Traduction, en termes de négligeabilité et d'équivalence, des limites connues concernant les fonctions usuelles.
Compatibilité de l'équivalence vis-à-vis des opérations suivantes : produit, quotient, composition par une fonction puissance entière.	On mettra en garde contre l'extension abusive à l'addition ou à la composition par d'autres fonctions $(\ln, \exp, \dots)$.

b) Développements limités

*Les développements limités ne seront présentés qu'**à l'ordre au plus 2**. Les développements limités seront par la suite étendus aux fonctions de deux variables.*
Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible.

Développement limité d'ordre 2 (respectivement d'ordre 1) en x_0 d'une fonction de classe C^2 (respectivement de classe C^1) au voisinage de x_0.	Unicité. Formule de Taylor-Young. Résultats admis.
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type : $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\epsilon(x-x_0)$, avec $a_2 \neq 0$.	Exemples.
Cas des fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0.	Sur des exemples, application à l'étude locale de fonctions.

4 - Intégration généralisée à un intervalle quelconque

Les intégrales généralisées sont introduites dans ce programme comme outil pour l'étude des variables aléatoires à densité. Il s'agit ici d'une part d'étendre la notion d'intégrale à un intervalle quelconque, d'autre part de mettre en place les techniques de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Les résultats de ce paragraphe pourront être admis. À cette occasion, on pourra consolider les acquis de première année concernant l'intégration sur un segment (positivité, techniques de calcul, intégrales comme fonctions de la borne supérieure...).

a) Intégrales sur un intervalle de type $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,+\infty[$

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue sur $[a,+\infty[$.

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et est finie.

Linéarité, positivité, relation de Chasles.

Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) ne seront pratiquées qu'avec des intégrales sur un segment.

Convergence des intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

On pourra en déduire la convergence des séries de Riemann $\displaystyle\sum\frac{1}{n^\alpha}$.

Extension des notions précédentes aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$.

b) Convergence des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si

$$x\longmapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [a,+\infty[.$$

De même, si f est continue et positive sur $]-\infty,a]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x\longmapsto\displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]-\infty,a]$.

Règles de comparaison dans les cas $f\leqslant g$, $f=o(g)$ et $f\underset{+\infty}{\sim} g$ avec f et g positives au voisinage de $+\infty$.

On adaptera ces propriétés au voisinage de $-\infty$. On utilisera comme intégrales de référence les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (pour $a>0$) et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

c) Convergence absolue

Convergence absolue.

Cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité.

La convergence absolue implique la convergence.

Résultat admis.

Extension aux intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

III - Probabilités et statistiques

1 - Statistiques bivariées

On s'appuiera dans ce paragraphe sur des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales (loi d'Okun, corrélation entre données économiques...).

Série statistique à deux variables quantitatives discrètes, nuage de points associé.	
Point moyen du nuage.	Notation $(\bar{x}, \bar{y})$.
Covariance empirique s_{xy}, formule de Koenig-Huygens.	Pour des n uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $s_{x,y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Cœfficient de corrélation linéaire empirique r_{xy}, propriétés et interprétation de ce coefficient.	$-1 \leqslant r_{x,y} \leqslant 1$ et interprétation lorsque $\lvert r_{x,y}\rvert = 1$.
Ajustement des moindres carrés, droites de régression.	On pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer. On discutera de la pertinence d'une régression linéaire selon les données observées.

2 - Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites (sans exiger la vérification de la convergence absolue des séries envisagées). On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$. On commencera par aborder des exemples où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.
Lois marginales, lois conditionnelles.	
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).	On se limitera à des cas simples tels que $X + Y$, XY.
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y) de variables aléatoires	$E(g(X,Y)) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y])$ (sous réserve de convergence absolue). Résultat admis. En particulier : espérance de la somme, du produit de deux variables aléatoires discrètes.
Linéarité de l'espérance.	Résultat admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis.
Loi du minimum, du maximum, de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. - Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Covariance de deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$.
Formule de Koenig-Huygens. Conséquence.	$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes et possèdent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle. Réciproque fausse.
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X, Y)$.
Propriétés.	$\lvert\rho(X, Y)\rvert \leqslant 1$. Cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.
Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes. Cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	On pourra admettre ce résultat.

3 - Suites de variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = x_i])$.
Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes.	
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n. Résultat admis.

Espérance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes. Variance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Fonctions numériques de deux variables réelles

L'objectif de ce chapitre est d'arriver à une bonne compréhension des problèmes de recherche d'extrema des fonctions de deux variables en faisant le lien avec les résultats concernant la réduction des matrices.
Dans les deux premiers paragraphes, on familiarisera les étudiants avec la notion de fonction de deux variables réelles en évitant tout problème de nature topologique, c'est pourquoi le domaine de définition sera systématiquement $\mathbf{R}^2$.
On introduira la notion de fonction de deux variables réelles à l'aide d'exemples issus d'autres disciplines et on exploitera les visualisations informatiques des surfaces en 3D ou les recherches d'éléments propres de matrices permises par Python.

Tous les résultats concernant les fonctions réelles de deux variables réelles seront admis.

1 - Fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$

Exemples de fonctions réelles de deux variables réelles.	Fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$. Fonctions polynomiales de deux variables réelles.
Distance euclidienne de deux points $\mathbf{R}^2$.	Notation $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big)$.
Continuité d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.	Une fonction réelle f de deux variables réelles, définie sur $\mathbf{R}^2$, est continue en un point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big) < r \Rightarrow \mid f(x, y) - f(x_0, y_0) \mid < \varepsilon$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion. On fera le lien avec la continuité des fonctions d'une variable réelle.
Opérations sur les fonctions continues.	Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions continues sont continus. Les fonctions polynomiales de deux variables réelles sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la composée d'une fonction continue à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue.
Lignes de niveau.	Illustration sur des exemples (Cobb-Douglas etc...).

2 - Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$

Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe C^1. Une fonction de classe C^1 est continue. Opérations sur les fonctions de classe C^1.	Notations $\partial_1 f$, $\partial_2 f$. La détermination de la classe d'une fonction en un point problématique est hors programme.
Gradient de f en un point.	Notation $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$. $f(x+h,y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ $+ \sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$ où $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε continue en (0,0). Résultat non exigible.
Dérivées partielles d'ordre 2. Fonctions de classe C^2. Une fonction de classe C^2 est de classe C^1. Opérations sur les fonctions de classe C^2.	Notations $\partial^2_{1,1} f, \partial^2_{1,2} f, \partial^2_{2,1} f, \partial^2_{2,2} f$ où $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1(\partial_2 f)(x,y)$.
Théorème de Schwarz.	Si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, alors pour tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y)$.
Matrice hessienne d'une fonction de deux variables réelles au point (x,y).	Notation $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}$. On remarquera que si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, sa matrice hessienne en tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$ est symétrique.

3 - Extrema d'une fonction de deux variables réelles

Dans ce paragraphe, on sensibilisera les étudiants aux notions d'ouverts et de fermés de $\mathbf{R}^2$. On donnera la définition d'un ensemble borné.
La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme et devra toujours être indiquée.
On étendra brièvement les définitions et propriétés concernant la continuité (respectivement le calcul différentiel) à des fonctions définies sur des parties (respectivement parties ouvertes) de $\mathbf{R}^2$.

Maximum, minimum local d'une fonction de deux variables réelles. Maximum, minimum global d'une fonction de deux variables réelles sur une partie de $\mathbf{R}^2$.	
Une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.	Résultat admis.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Point critique.	Si une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$ admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. On pourra revenir à titre d'exemple sur la détermination des coefficients de la droite de régression.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local.	Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont strictement positives (respectivement strictement négatives) alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en (x_0, y_0).
Point col (ou point selle).	Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un point col pour f.

II - Probabilités

1 - Graphes probabilistes (chaînes de Markov)

Tous les résultats de cette section seront admis.

Graphe probabiliste. Matrice de transition.	On commence par l'exemple simple d'un graphe à deux ou trois états. Les sommets du graphe sont numérotés à partir de 1.
Chaîne de Markov associée (X_n).	X_n est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des sommets du graphe.
Etats de la chaine de Markov.	Le n-ème état de la chaîne de Markov, noté V_n, est la matrice ligne $(P(X_n = 1), ..., P(X_n = r))$.
Si $M = (m_{i,j})$, on a la formule : $P(X_n = j) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} P(X_{n-1} = i)$.	Les coefficients de la matrice de transition sont des probabilités conditionnelles.
Relation de récurrence matricielle entre les états successifs de la chaîne de Markov.	$V_n = V_{n-1} M$. On pourra introduire l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ $\mu : W \mapsto WM$ et remarquer que la matrice de μ dans la base canonique est ${}^tM$.
Etat stable.	$V = VM$. La matrice des coordonnées de V dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ (soit ${}^tV$) est un vecteur propre de ${}^tM$ relatif à la valeur propre 1. On donnera l'interprétation probabiliste de l'état stable.

Etude sur des exemples des différents comportements possibles d'un graphe probabiliste à deux états. — Savoir-faire non exigible.

2 - Variables aléatoires à densité

On se limitera dans ce chapitre à des densités ayant des limites finies à gauche et à droite, en tout point de **R**.

a) Définition des variables aléatoires à densité

Définition d'une variable aléatoire à densité. — On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur **R** et de classe C^1 sur **R** éventuellement privé d'un ensemble fini de points.

Toute fonction f_X à valeurs positives, qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points, est une densité de X. — Pour tout x de **R**, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Caractérisation de la loi d'une variable à densité par la donnée d'une densité f_X.

Toute fonction f positive, continue sur **R** éventuellement privé d'un nombre fini de points et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ est la densité d'une variable aléatoire. — Résultat admis.

Si f est une densité de probabilité, $F : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 en tout point où f est continue. — En un tel point, $F'(x) = f(x)$. Résultat admis.

Transformation affine d'une variable à densité. — Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et une densité de $aX + b$ ($a \neq 0$).

b) Moments d'une variable aléatoire à densité

Espérance. — Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $\mathrm{E}(X)$ est égale à cette intégrale. Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.

Variable aléatoire centrée.

Théorème de transfert pour l'espérance.	Si X est une variable aléatoire admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et si g est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $]a,b[$, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et dans ce cas : $E(g(X)) = \int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$. Résultat admis.
Variance, écart-type, variables aléatoires centrées réduites.	Exemples de variables aléatoires n'admettant pas de variance.

c) Lois à densité usuelles

Pour chacune de ces lois, on donnera des contextes dans lesquels on les utilise.

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Loi normale centrée réduite.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. $\boxed{\blacktriangleright}$ On pourra démontrer en exercice que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge.
Loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance. Variance.	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.	$\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
Une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.	Résultat admis.

d) Exemples simples de transferts

On réinvestira dans ce paragraphe les lois usuelles à densité.

Calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.	Les candidats devront savoir retrouver les densités de $aX+b$ $(a \neq 0)$, X^2, $\exp(X)$, ... Loi de $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$, où Y suit une loi uniforme à densité sur l'intervalle $[0,1[$.
Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois uniformes.	Si $a < b$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \Longleftrightarrow Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales.	Si $a \neq 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Longleftrightarrow aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

3 - Compléments sur les variables aléatoires réelles quelconques

La définition de l'espérance ou des moments d'ordre supérieur d'une variable aléatoire quelconque est hors d'atteinte dans le cadre de ce programme et toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques. En particulier, le théorème de transfert ci-dessous permet de calculer l'espérance de $g(X)$ dans le cas où X est à densité.

Tous les résultats de cette section seront admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles quelconques.	Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si $P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])P([Y \in J])$ pour tous intervalles réels I et J. Généralisation à un ensemble fini ou une suite de variables aléatoires réelles quelconques.
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n.
Espérance d'une somme de variables aléatoires.	Si X et Y admettent une espérance, $X+Y$ admet une espérance et $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires.
Croissance de l'espérance.	Si $P([X \leqslant Y]) = 1$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.
Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, $X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.

Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance,

$$\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = |X|^r$, $r \in \mathbf{N}^*$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P([|X - E(X)| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.

Alors $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} P([|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon]) = 0$.

c) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires vers une variable aléatoire X.

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout réel x où F_X est continue.

Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Caractérisation dans le cas où les X_n, $n \in \mathbf{N}^*$ et X prennent leurs valeurs dans $\mathbf{Z}$.

$(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \lim_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = P([X = k]).$$

Résultat admis.

Application à la convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

On observera sur des exemples la convergence en loi d'une chaîne de Markov (dont le graphe sous-jacent est complet) vers la loi décrite par son état stable.

Théorème limite central.	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$ associées aux variables $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. D'où, on a pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P([a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$ Résultats admis.
Exemples d'approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale.	Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

5 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$ (éventuellement de $\mathbf{R}^2$). Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ), c'est-à-dire à en obtenir une valeur approchée, à partir d'un échantillon de données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1, \ldots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de $g(\theta)$.

Un estimateur se définit donc de l'intention de fournir une estimation. Cette intention est garantie le plus souvent par un résultat de convergence probabiliste (lorsque n tend vers $+\infty$) vers le paramètre à estimer (convergence de l'estimateur). Ceci sort des objectifs du programme mais pourra être commenté sur les exemples proposés.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ où $\varphi(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est un estimateur de $g(\theta)$ et $(x_1,\dots,x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1,\dots,X_n)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\varphi(x_1,\dots,x_n)$.

n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $\theta = p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1,\dots,X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de $g(\theta)$. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ observé.
Exemples simples d'estimateurs.	Exemple de la moyenne empirique $\overline{X}_n = \dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$. Estimateur du maximum de vraisemblance : on ne fera pas de développement théorique, mais on en expliquera le principe et on l'instanciera sur les lois de Bernoulli et de Poisson. ▶

b) Estimation par intervalle de confiance

La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle aléatoire qui contienne θ avec une probabilité minimale donnée. On ne considère dans ce paragraphe que des intervalles de confiance de l'espérance mathématique m faisant intervenir l'estimateur $\overline{X}_n$. Ce paragraphe ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique.

Recherche d'un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1-\alpha$ à partir de $\overline{X_n}$ et à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.	▶
Estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart type est connu.	On pourra utiliser cet exemple pour introduire la variance empirique $\overline{S}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2}{n}$. ▶
Intervalle de confiance asymptotique : $P\left(\left[\overline{X}_n - t_\alpha\dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + t_\alpha\dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha$ où t_α est le quantile d'ordre $1-\dfrac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$	Ce résultat est une conséquence direct du théorème limite central. Il n'est pas exigible en l'état. On pourra mentionner le cas particulier $\alpha = 0,05$. ▶

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - **Programme du troisième semestre.**

1 - Bases de données

L'administration, les banques, les assurances, les secteurs de la finance utilisent des bases de données, systèmes d'informations qui stockent dans des fichiers les données nombreuses qui leur sont nécessaires. Une base de données relationnelle permet d'organiser, de stocker, de mettre à jour et d'interroger des données structurées volumineuses utilisées simultanément par différents programmes ou différents utilisateurs. Un logiciel, le système de gestion de bases de données (SGBD), est utilisé pour la gestion (lecture, écriture, cohérence, actualisation...) des fichiers dans lesquels sont stockées les données. L'accès aux données d'une base de données relationnelle s'effectue en utilisant un langage informatique qui permet de sélectionner des données spécifiées par des formules de logique, appelées requêtes d'interrogation et de mise à jour.
L'objectif est de présenter une description applicative des bases de données en langage de requêtes SQL (Structured Query Language). Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On introduira les concepts à l'aide d'exemples simples issus de contextes appropriés (fichier clients, gestion des stocks, gestion du personnel ...)

Modèle relationnel : relation, attribut, domaine, clef primaire « PRIMARY KEY », clef étrangère « FOREIGN KEY », schéma relationnel.	
Vocabulaire des bases de données : table, champ, colonne, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.	On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier « INTEGER », chaîne « TEXT ».
Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.
Opérateurs arithmétiques $+$, $-$, $*$.	
Opérateurs de comparaison : $=$, $<>$, $<$, $<=$, $>$, $>=$.	
Opérateurs logiques : « AND », « OR », « NO ».	

a) Commandes exigibles

« WHERE »	
« SELECT nom_de_champ FROM nom_de_table ».	Sélection de données dans une table.
« INSERT INTO nom_de_table ».	Insertion de données dans une table. On pourra utiliser « VALUES (élément1, élément2,...)".
« DELETE FROM nom_de_table ».	Suppression de données d'une table.
« UPDATE nom_de_ table ».	Mise à jour de données d'une table.

« SELECT* FROM nom_de_table_1 INNER JOIN nom_de_table_2 ».	Réalisation d'une jointure. On pourra ajouter une condition « ON Φ »dans le cas où Φ est une conjonction d'égalités. Aucune autre notion de jointure n'est dans ce programme.
« CREATE TABLE nom_de_table ».	Création d'une table.

b) Commandes non exigibles

On pourra utiliser par commodité la liste d'opérateurs, fonctions et commandes ci-dessous. Ce ne sont pas des attendus du programme et ils sont non exigibles.

Les opérateurs ensemblistes : union « UNION », intersection « INTERSECTION », différence « EXCEPT ».

Les opérateurs spécifiques de l'algèbre relationnelle : projection, sélection (ou restriction), renommage, produit cartésien .

Les fonctions d'agrégation : min « MIN », max « MAX », somme « SUM », moyenne « AVG », comptage « COUNT ».

Les commandes « DISTINCT », « ORDER BY »

2 - Equations et systèmes différentiels

L'objectif est d'illustrer les concepts vus dans le cours de mathématiques. On pourra dégager sur des exemples simples des notions qualitatives, mais aucune technicité n'est attendue. La discrétisation d'une équation différentielle n'est pas au programme. On pourra utiliser le solveur scipy.integrate.odeint ; la maîtrise d'un tel outil n'est pas exigible.

Représentations graphiques de trajectoires.	Sur des exemples en lien avec le programme : Interprétation des paramètres. Influence des conditions initiales. On observera le phénomène de convergence vers un équilibre.

3 - Statistiques descriptives bivariées

Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage. Covariance empirique, cœfficient de corrélation empirique, droites de régression.	On tracera le nuage de points et les droites. de régression et on pourra effectuer des prétransformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer.

II - **Programme du quatrième semestre.**

1 - Chaînes de Markov

Ce thème sera l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes, de revisiter les notions de programmation et de représentation de données par un graphe fini, qui sont vues en première année, ainsi que d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire étudiés au troisième semestre.

Matrice de transition. Étude sur des exemples simples. Etat stable. Comportement limite.	On pourra étudier par exemple l'indice de popularité d'une page Web (PageRank), modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à une autre), ou les systèmes de bonus-malus en assurances. Simulation et mise en évidence d'états stables. On observera la convergence en loi d'une chaîne de Markov (sur un graphe complet) vers son état stable.

2 - Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance

Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles (simple comparaison de valeurs numériques) ou créer plusieurs jeux de données par simulation. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Intervalle de confiance asymptotique obtenu avec le théorème limite central pour estimer le paramètre d'une loi de Bernoulli.	Résultat admis On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe II
Programmes de mathématiques approfondies - informatique

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques approfondies – informatique de la classe d'ECG 1ère année

Table des matières

Introduction

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.

- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC est celui du cours de mathématiques complémentaires de la classe terminale. Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du cours de spécialité mathématiques de la classe de première et du cours de mathématiques complémentaires de terminale, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants.

Le programme s'organise autour de quatre points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordée d'abord par le calcul matriciel, outil indispensable pour le calcul multidimensionnel, puis par les espaces vectoriels. La pratique de l'algèbre linéaire permet de développer chez l'étudiant des capacités d'abstraction, mais aussi de renforcer sa démarche logique indispensable en mathématiques.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples « pathologiques ». On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.
- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en terminale.
- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse ou d'outils de calculs en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et le cours de mathématiques qu'ils auront choisi en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités au lycée, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus. Les nombres complexes n'étant abordés que dans le cours optionnel de mathématiques expertes, ne font plus partie du programme.

L'étude des variables aléatoires discrètes infinies en première année nécessite l'introduction des séries. Dans un souci d'allègement de la première année, en continuité avec les programmes du lycée, le concept de variable aléatoire à densité ne sera présenté qu'en deuxième année. Cependant les intégrales généralisées seront présentées en analyse dès la première année.

L'algèbre linéaire est abordée, au premier semestre, par le biais du calcul : calcul matriciel, systèmes d'équations linéaires. Des rudiments de vocabulaire général sur les espaces vectoriels sont introduits lors du premier semestre. Ce choix a pour ambition de familiariser les étudiants avec le calcul multidimensionnel afin de les préparer à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel, qui sera étudiée essentiellement au second semestre.

En analyse, le premier semestre permet de consolider et approfondir des notions familières aux étudiants, comme les suites, les intégrales et les dérivées. Le second semestre généralise les notions du premier semestre en introduisant les séries et les intégrales généralisées, dans l'objectif de l'étude des probabilités (les variables aléatoires à densité ne seront abordées qu'en deuxième année).

Pour les probabilités, on se place sur les espaces probabilisés finis au premier semestre, puis plus généraux au second semestre.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

La plupart des résultats mentionnés dans le programme seront démontrés. Pour certains marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. Le langage de référence choisi pour ce programme est Python.

Enseignement de mathématiques du premier semestre

I - **Raisonnement et vocabulaire ensembliste**

1 - Éléments de logique

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire des raisonnements mathématiques, mais tout exposé théorique est exclu. Les notions de ce paragraphe pourront être présentées en contexte au cours du semestre, évitant ainsi une présentation trop formelle.

Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée.
Quantificateurs : $\forall$, $\exists$.

On présentera des exemples de phrases mathématiques utilisant les connecteurs et les quantificateurs, et on expliquera comment écrire leurs négations.

2 - Raisonnement par récurrence et calcul de sommes et de produits

Emploi du raisonnement par récurrence.

Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Formules donnant : $\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\sum_{k=1}^{n} k$.

Les formules donnant $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ seront vues en exercice. Elles ne sont pas exigibles.

Notations $\sum$, $\prod$.

Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sum_{i \in A} u_i$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^2$. $\boxed{\blacktriangleright}$

Définition de $n!$.

Formule du binôme, triangle de Pascal.

On pourra introduire les coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal

3 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, en vue de préparer l'étude des chapitres d'algèbre linéaire et de probabilités, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$.
Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

En lien avec le programme de terminale, on montrera que le nombre $\binom{n}{p}$ est aussi le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire. $\boxed{\blacktriangleright}$

Formules $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Complémentaire. Notation $\overline{A}$.

La notation $\overline{A}$ est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation $\complement_E A$.

Union, intersection. Notations $\bigcap$, $\bigcup$.
Distributivité. Lois de Morgan.

On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels.

Définition du produit cartésien d'ensembles.

On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition. Composée de deux applications.

Restriction et prolongement d'une application.	Ces deux notions ne seront introduites que dans les cours d'algèbre linéaire et d'analyse.
Applications injectives, surjectives, bijectives.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - **Polynômes**

La construction des polynômes formels n'est pas au programme. On identifiera polynômes et fonctions polynomiales. Les démonstrations des résultats de ce paragraphe ne sont pas exigibles.

Ensemble $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. Opérations algébriques.	
Degré.	Par convention $\deg(0) = -\infty$.
Ensembles $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n.	
Division euclidienne.	Multiples et diviseurs.
Racines, ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité par factorisation d'une puissance de $(x - a)$. Formule de Taylor pour un polynôme	Cas des polynômes de degré 2.
Exemples simples de factorisation dans $\mathbf{R}[x]$.	On énoncera le résultat général sans démonstration.

III - **Algèbre linéaire**

L'objet de ce chapitre est la mise en place de l'outil vectoriel dès le premier semestre, afin de confronter rapidement les étudiants aux notions étudiées dans le cours d'algèbre linéaire.

Dans un premier temps, on présentera la notion de matrice et l'on familiarisera les étudiants à la manipulation de ces objets avant d'en aborder les aspects vectoriels.

L'étude de ce chapitre pourra être menée en lien avec l'algorithmique en ce qui concerne le calcul matriciel. $\boxed{\blacktriangleright}$

1 - Calcul matriciel

a) Matrices rectangulaires

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$.	
Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.	Addition, multiplication par un scalaire. $\boxed{\blacktriangleright}$
Produit matriciel.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. $\boxed{\blacktriangleright}$
Transposée d'une matrice. Transposition d'un produit.	Notation ${}^tA$.

b) Cas des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{R}$.
Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques.

Matrices inversibles, inverse d'une matrice.

On admettra que pour une matrice carrée, un inverse à gauche ou à droite est l'inverse.

Inverse d'un produit. Transposition de l'inverse.

Formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.
Inversibilité d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.

2 - Systèmes linéaires

Tout développement théorique est hors programme.

Définition d'un système linéaire.

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_j \leftrightarrow L_i$, $L_i \leftarrow aL_i + bL_j \quad (a \neq 0, i \neq j)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

Un système linéaire admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Un système linéaire homogène admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

Écriture matricielle d'un système linéaire.

Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.

3 - Introduction aux espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Cette première approche des espaces vectoriels permet d'introduire le vocabulaire et sera accompagnée de nombreux exemples.

Il sera possible, à l'occasion d'autres chapitres en analyse ou probabilité, de rappeler la structure d'espace vectoriel des ensembles les plus courants, afin de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et les notions fondamentales, avant une étude plus approfondie des espaces vectoriels au second semestre.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$. *Les notions de corps, d'algèbre et de groupe sont hors programme.*

Structure d'espace vectoriel.
Sous-espaces vectoriels.

Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces $\mathbf{R}^n$, espaces de polynômes, espaces de matrices), de l'analyse (espaces de suites, de fonctions). On distinguera les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Combinaisons linéaires.

On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies.
Une famille finie d'un espace vectoriel E est la donnée d'une liste finie $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de cette famille est n.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base.

On se limitera à des familles et des bases de cardinal fini.

Exemple de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[x]$.

Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.

IV - **Suites de nombres réels**

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants dès le premier semestre avec des méthodes d'analyse. La construction de **R** *est hors programme et le théorème de la borne supérieure est admis.*

1 - Vocabulaire sur l'ensemble R des nombres réels

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie non vide de **R**.

Quand il existe, le maximum de A coincide avec la borne supérieure de A.

Théorème de la borne supérieure.

Résultat admis.

Partie entière d'un réel.

Notation $\lfloor x \rfloor$. La notation $E(.)$ est réservée à l'espérance mathématique.

2 - Exemples de suites réelles

Suites arithmético-géométriques.

On se ramenera au cas d'une suite géométrique.

Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 à coefficients réels. Équation caractéristique. On se limitera aux équations caractéristiques à solutions réelles.

Cette partie pourra être l'occasion d'illustrer, dans un cas concret, les notions de famille libre, génératrice et de base.

3 - Convergence des suites réelles - Théorèmes fondamentaux

On utilisera la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer le comportement des suites. $\boxed{\blacktriangleright}$

Limite d'une suite, suites convergentes.

On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.

On donnera une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε, n_0) sans en faire une utilisation systématique.

Généralisation aux suites tendant vers $\pm\infty$.

Unicité de la limite.

Opérations algébriques sur les suites convergentes.

Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Existence d'une limite par encadrement.

Suites monotones, croissantes, décroissantes, suites adjacentes.

Théorème de limite monotone.	Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge, la limite étant la borne supérieure (respectivement inférieure) de l'ensemble des valeurs de la suite. Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.	
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.	
Croissances comparées.	Comparaisons des suites $(n!)$, (n^a), (q^n), $(\ln(n)^b)$.

V - **Fonctions réelles d'une variable réelle**

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de **R**. *Les étudiants doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement.*

L'analyse reposant largement sur les inégalités, on les pratiquera régulièrement à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration n'est exigible des étudiants.

1 - Limite et continuité d'une fonction d'une variable en un point

Définition de la limite et de la continuité d'une fonction d'une variable en un point. Unicité de la limite. Limites à droite et à gauche. Extension au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.	On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I, x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de **R**, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$; dans ce cas, lorsque x_0 appartient à I, f est continue en x_0, sinon f se prolonge en une fonction continue en x_0.
Opérations algébriques sur les limites. Compatibilité avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement. Prolongement par continuité en un point.	
Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Limite d'une fonction composée.	La caractérisation séquentielle de la limite n'est pas au programme.

2 - globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

On insistera sur les représentations graphiques. On s'appuiera sur les fonctions de référence pour illustrer les notions de cette section. Les fonctions exponentielle, puissance et logarithme ont été vues *en terminale. Les fonctions trigonométriques ne sont pas supposées connues. L'existence des fonctions cosinus et sinus n'est pas un enjeu du programme. On interprétera géométriquement leurs propriétés à l'aide du cercle trigonométrique.*

Fonctions de référence	exp, ln, $x \mapsto x^\alpha$, cos, sin, tan, arctan, valeur absolue et partie entière.
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.	Aucune autre formule n'est exigible. Les formules produit seront vues en exercice et mises en application.
Croissances comparées	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a \lvert\ln(x)\rvert^b$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \lvert x\rvert^a \mathrm{e}^{bx}$.
Fonctions paires, impaires, périodiques.	
Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones. Théorème de limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle, opérations algébriques, composition. Théorème des valeurs intermédiaires.	
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Notations $\max\limits_{[a,b]} f$ et $\min\limits_{[a,b]} f$.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation. On utilisera ce résultat pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. $\boxed{\blacktriangleright}$
Représentation graphique de la fonction réciproque.	

3 - Dérivation

Dérivées à gauche et à droite. Dérivée en un point. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, dérivée d'une composée. Exemples.	Interprétation graphique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Dérivation des fonctions réciproques.	Notation f'.
Dérivée d'un polynôme et des fonctions de référence.	

Théorème de Rolle.

Égalité et inégalités des accroissements finis.

Si $|f'| \leqslant k$ sur un intervalle I, alors :
$$\forall (a,b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|.$$
Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu. ▶

Caractérisation des fonctions constantes et monotones par l'étude de la dérivée.

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Théorème du prolongement de la dérivée.

Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, continue en a, et si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

4 - Intégration sur un segment

La construction de l'intégrale de Riemann est hors programme.

Définition de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment comme aire sous la courbe.
On généralise à une fonction de signe quelconque sans soulever de difficulté théorique.

Illustration par la méthode des rectangles. ▶

Sommes de Riemann

La convergence des sommes de Riemann ne sera démontrée que dans le cas d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$.

Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance.

Cas d'une fonction continue, positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle.

Si f est continue sur $[a,b]$ et $a \leqslant b$,
$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

$x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est une primitive de f.

Résultat admis. Pour toute primitive F de f :
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$
▶ On pourra vérifier ce résultat sur des exemples en informatique.

Intégration par parties.

Changement de variable.

Les changements de variable non affines doivent être indiqués aux candidats.
On se restreindra à des changements de variables C^1 strictement monotones.

VI - **Probabilités sur un ensemble fini**

L'objectif de cette première approche est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique majeure.

Dans la continuité du programme de terminale, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis et de mettre en place, dans des situations simples, les concepts probabilistes de base, en ne *faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires. C'est pourquoi, pour le premier semestre, on se restreindra à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Le terme tribu ne sera pas employé.*

On évitera pour cette première approche un usage avancé de la combinatoire, et l'on s'attachera à utiliser le vocabulaire général des probabilités.

1 - Généralités

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles (ou « disjoints »).	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples. On fera le lien entre ces opérations et les connecteurs logiques.
Système complet d'événements fini.	Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes : • $\forall i, j \in I$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$ • $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

b) Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.	Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application additive P à valeurs dans $[0, 1]$ et vérifiant $P(\Omega) = 1$. Cas de l'équiprobabilité.
Formule de Poincaré ou du crible pour deux et trois événements.	

c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.	Notation P_A. P_A est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Formule des probabilités composées.	• Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. • Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors : $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$.
Formule des probabilités totales	Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$. Si de plus, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $P(A_i) \neq 0$, on a : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.
Formule de Bayes.	On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

d) Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.

Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
On remarquera que la notion d'indépendance est relative à la probabilité.

Indépendance mutuelle de n événements.
Si n événements A_1, ..., A_n sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

2 - Variables aléatoires réelles finies

On introduit dans cette section la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Ces variables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie la démonstration des formules.

Une variable aléatoire réelle est une application de Ω dans $\mathbf{R}$.

On adoptera les notations habituelles telles que $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.

Système complet associé à une variable aléatoire.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

La loi de X est la donnée de $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$. Étude de la loi de $Y = g(X)$.

On se limitera à des cas simples, tels que $g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, ...

Espérance d'une variable aléatoire.

$E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Linéarité de l'espérance.
Croissance de l'espérance

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Théorème de transfert.

$E(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.

Variance et écart-type d'une variable aléatoire.
Cas particulier où $V(X) = 0$.

Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Calcul de la variance.
$V(aX + b) = a^2V(X)$.

Formule de Koenig-Huygens :
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$
$\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

3 - Lois usuelles $\boxed{\blacktriangleright}$

Variable aléatoire certaine.

Loi de Bernoulli, espérance et variance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. La variable indicatrice $\mathbf{1}_A$ de l'événement A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

Loi binomiale. Espérance, variance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On pourra faire le lien avec la formule du binôme de Newton et les propriétés des coefficients binomiaux.

Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Enseignement de mathématiques du second semestre

I - **Algèbre linéaire**

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir et compléter les notions vues au premier semestre.

1 - Espaces vectoriels de dimension finie

Dans cette section, aucune démonstration n'est exigible.

Espaces admettant une famille génératrice finie. Existence de bases. Si L est libre et si G est génératrice, le cardinal de L est inférieur ou égal au cardinal de G.	
Dimension d'un espace vectoriel.	Notation $\dim(E)$.
Caractérisation des bases.	Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre ou génératrice de cardinal n est une base.
Rang d'une famille finie de vecteurs. Théorème de la base incomplète.	
Dimension d'un sous-espace vectoriel.	Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

2 - Compléments sur les espaces vectoriels

Dans cette section, aucune démonstration n'est exigible.

Somme de deux sous-espaces vectoriels.	
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.	Tout vecteur de la somme se décompose de manière unique.
Existence d'un supplémentaire en dimension finie.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont supplémentaires, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. Caractérisation de $E = F \oplus G$ par la dimension et l'intersection de F et G.	Dimension d'un supplémentaire.
Concaténation de bases de deux sous-espaces vectoriels.	Caractérisation de sommes directes par concaténation de bases.

3 - Applications linéaires

a) Cas général

Définition d'une application linéaire de E dans F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.	On s'appuiera sur des exemples concrets, par exemple l'application $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X \longmapsto MX$, dont on soulignera les propriétés.
Composée de deux applications linéaires.	
Isomorphismes.	Un espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Endomorphismes, espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E.	Puissances d'un endomorphisme.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Projecteurs associés à deux espaces supplémentaires.	Caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.

b) Cas de la dimension finie

Rang d'une application linéaire.	Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. Lien entre recherche de l'image et résolution de système.
Formule du rang.	Si E et F sont des espaces vectoriels, E étant de dimension finie, et une application linéaire u de E dans F, $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\ u) + \dim(\mathrm{Im}\ u)$. Application à la caractérisation des isomorphismes. Application : le noyau d'une forme linéaire non-nulle est un hyperplan.

c) Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans des bases.	Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$. Matrice de $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X \longmapsto MX$ relative aux bases canoniques. Matrice d'une forme linéaire.
Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Matrices colonnes des coordonnées d'un vecteur dans deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Formule $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$
Lien du produit matriciel avec la composition des applications linéaires.	Si $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F et G, f une application linéaire de E dans F, g une application linéaire de F dans G, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.
Rang d'une matrice.	Pour toutes bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ est égal au rang de f.

Une matrice et sa transposée ont même rang.	Résultat admis.

d) Cas des endomorphismes et des matrices carrées

Matrice d'un endomorphisme f de E dans la base $\mathcal{B}$.	Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Formule du binôme pour deux endomorphismes ou deux matrices carrées qui commutent.	
Lien entre les isomorphismes de E et les matrices inversibles.	On pourra démontrer que pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'inverse à gauche est également un inverse à droite.
Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice carrée. Polynôme annulateur.	Exemples de calcul d'isomorphismes réciproques, d'inverses de matrices et de puissances k-ème d'une matrice par utilisation d'un polynôme annulateur. Toute théorie générale sur les polynômes annulateurs est exclue.

II - Compléments d'analyse

1 - Étude asymptotique des suites

Suite négligeable.	Notation $u_n = o(v_n)$. On présentera à nouveau les croissances comparées vues au premier semestre.
Suites équivalentes.	Notation $u_n \sim v_n$. $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

2 - Comparaison des fonctions d'une variable au voisinage d'un point

Fonction négligeable au voisinage de x_0. Notation $f = o(g)$.	On revient sur la croissance comparée $\lim\limits_{x \to 0} x^a \lvert\ln(x)\rvert^b$
Fonctions équivalentes au voisinage de x_0.	Notation $f \underset{x_0}{\sim} g$. $f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$.
Extension au cas $x_0 = \pm\infty$.	On revient sur les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \lvert x\rvert^a \mathrm{e}^{bx}$
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

3 - Séries numériques

Convergence d'une série, somme et reste d'une série convergente.	On pourra utiliser des représentations graphiques pour conjecturer la nature d'une série. $\boxed{\blacktriangleright}$

Combinaison linéaire de séries convergentes.

Convergence des séries à termes positifs.

Convergence des séries à termes positifs dans les cas $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \sim v_n$.

Résultat analogue pour les séries à termes négatifs. Résultats admis.

Définition de la convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes.

Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.

Résultat admis.

Convergence des séries de Riemann.

Convergence et formules de sommation des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.

Série exponentielle.

$\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Ce résultat pourra être admis ou démontré ultérieurement à l'aide de la formule de Taylor. $\boxed{\blacktriangleright}$

Exemples d'étude de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n).

4 - Intégrales sur un intervalle quelconque

On évitera toute technicité dans ce chapitre dont l'objectif est d'introduire les outils utiles à l'étude des variables aléatoires à densité.

Intégration sur un intervalle semi-ouvert.
Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$.

On dira que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.
On pose alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \mapsto b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Règles de calcul sur les intégrales convergentes, linéarité, relation de Chasles, positivité, inégalités.
Cas d'une fonction continue, positive sur $[a, b[$ et d'intégrale nulle.

Cas des fonctions positives.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si
$x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Théorèmes de convergence pour f et g positives au voisinage de b, dans les cas où $f \leqslant g$ et $f \underset{b}{\sim} g$.

Théorème analogue pour des fonctions f et g négatives au voisinage de b. Théorèmes admis.

Définition de la convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute fonction continue est la différence de deux fonctions continues positives.
Théorème admis.

Théorèmes de convergence dans le cas $f = o(g)$ avec g positive au voisinage de b.
Extension des notions précédentes aux intégrales sur un intervalle quelconque.

Brève extension aux fonctions définies et continues sur $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

Pratique de l'intégration par parties pour les intégrales sur un intervalle quelconque.

L'intégration par parties sera pratiquée pour des intégrales sur un segment, on effectuera ensuite un passage à la limite.

Changement de variables.

Si f est continue sur $]a, b[$, si φ est une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, croissante et de classe C^1, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence sont égales.
Énoncé analogue dans le cas où φ est décroissante.
Les changements de variables non affines devront être indiqués aux candidats et ne pas présenter de difficultés techniques.

5 - Dérivées successives

Fonction p fois dérivable en un point.

Notation $f^{(p)}$.

Fonctions de classe C^p, de classe C^∞ sur un intervalle. Opérations algébriques, formule de Leibniz. Théorème de composition.
La dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré au plus n est nulle.

6 - Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Ces formules seront données à l'ordre n pour une fonction de classe C^∞.

7 - Développements limités

L'étude des développements limités ne constitue pas une fin en soi et l'on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine. La composition des développements limités n'est pas au programme. On se limitera, en pratique, à des développements limités au voisinage de 0.

Définition d'un développement limité.	On fera le lien entre un développement limité à l'ordre 1 et la valeur de la dérivée. On pourra introduire et manipuler la notation $x^n\varepsilon(x)$ avant l'utilisation éventuelle de la notation $o(x^n)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^∞. Application de la formule de Taylor-Young au développement limité de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, sinus et cosinus).	Résultat admis. Unicité du développement limité.
Somme et produit de développements limités.	
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_k x^k + x^k \epsilon(x), k \geq 2$ et $a_k \neq 0$	La forme du graphe au voisinage d'un point dépend principalement du premier terme non linéaire du développement limité. Exemples avec $k = 2$ et $k = 3$

8 - Extremum

Pour préparer l'introduction des notions de topologie du programme de deuxième année, on insistera sur la différence entre la recherche d'extremum sur un segment et la recherche d'extremum sur un intervalle ouvert. On n'étudiera aucun exemple de fonction $\mathcal{C}^1$ sans être $\mathcal{C}^2$.

Toute fonction continue sur un segment admet des extrema globaux sur ce segment.	
Dans le cas d'une fonction de classe C^1 : condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un intervalle ouvert. Définition d'un point critique.	On pourra montrer que le résultat tombe en défaut lorsque l'intervalle de définition n'est pas ouvert.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique pour une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert.	Ce résultat sera démontré grâce au développement limité à l'ordre 2.

9 - Fonctions convexes

Tous les résultats de cette section seront admis. On n'étudiera aucun exemple de fonction convexe $\mathcal{C}^1$ sans être $\mathcal{C}^2$.

Définition des fonctions convexes, fonctions concaves.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ tels que $t_1+t_2 = 1$, $$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$ Interprétation géométrique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Généralisation de l'inégalité de convexité.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1.	Les étudiants devront savoir que si f est de classe C^1, alors f est convexe si et seulement si l'une des deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • C_f est au-dessus des tangentes.
Caractérisation des fonctions convexes et concaves de classe C^2.	

Condition suffisante de minimum global en un point critique d'une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert
Point d'inflexion.

10 - Graphes de fonctions

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions. Allure locale du graphe (tangentes). Convexité. Asymptotes éventuelles.

On pourra étudier la position d'une courbe par rapport à une asymptote (éventuellement oblique). Les branches paraboliques ne sont pas au programme.
Exemples de points d'inflexion. ▶

III - **Probabilités sur un ensemble quelconque**

Dans ce second temps de l'étude des probabilités, le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.

1 - Espace probabilisé

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.

L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union et intersection dénombrable, par passage au complémentaire.
Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

Une probabilité est une application P définie sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des évenements à valeurs dans $[0, 1]$, σ-additive telle que $P(\Omega) = 1$.
Notion d'espace probabilisé.

Notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Théorème de la limite monotone.

• Soit (A_n) une suite d'événements, croissante pour l'inclusion. On a :
$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$
• Soit (A_n) une suite d'événements, décroissante pour l'inclusion. On a :
$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Conséquences du théorème de la limite monotone.

Pour toute suite (B_k) d'événements,
• $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)$.
• $P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right)$.
Les démonstrations de ces formules ne sont pas exigibles.

Propriétés vraies presque sûrement. Événement négligeable, événement presque sûr.

On pourra donner comme exemple d'événement négligeable la réalisation d'une suite infinie de PILE lors d'un jeu de PILE ou FACE.

Notion de probabilité conditionnelle conditionnée par un évènement de probabilité non nulle.

Si A vérifie $P(A) \neq 0$, alors $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

Formule des probabilités totales.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B on a :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.

2 - Variables aléatoires réelles discrètes

On commencera cette section en expliquant comment les résultats vus précédemment se prolongent dans le cadre général. On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Une fonction $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire discrète lorsque :
- $X(\Omega) = \{u_i\}_{i\in I}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$;
- pour tout $i \in I, [X = u_i]$ est un événement.

Loi d'une variable aléatoire discrète.

La loi de X est la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes.

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes (mutuellement) lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

Espérance d'une variable aléatoire.

Quand $X(\Omega)$ est infini, X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente.
Cette valeur ne dépend pas de l'indexation de $X(\Omega)$ (admis).

Linéarité de l'espérance.
Croissance de l'espérance.

$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$. Résultat admis.

Existence d'une espérance par domination.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes vérifiant $0 \leqslant \lvert X\rvert \leqslant Y$, et si Y admet une espérance, alors X admet également une espérance. Dans ce cas, $\lvert E(X)\rvert \leqslant E(Y)$. Résultat admis.
Théorème de transfert.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$ est absolument convergente, et alors $$E(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x).$$ Cette valeur ne dépend pas de l'indexation de $X(\Omega)$. Théorème admis.
Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX+b) = a^2V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$ $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.
Cas particulier où $V(X) = 0$.	
Introduction à la notion de fonction de répartition.	F_X est définie sur $\mathbf{R}$ par : $F_X(x) = P(X \leq x)$.

3 - Lois de variables aléatoires discrètes usuelles

L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. On revisitera les lois usuelles du premier semestre. $\boxed{\blacktriangleright}$

Retour sur les variables aléatoires certaines.	Fonction de répartition.
Retour sur les variables de Bernoulli.	Fonction de répartition.
Loi géométrique (rang d'apparition d'un premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Définition, espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. $\boxed{\blacktriangleright}$ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour tout nombre entier naturel non nul k, $$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$
Loi de Poisson : définition, espérance, variance	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

4 - Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Caractérisation de la loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.	La loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée des valeurs $P([X=x]\cap[Y=y])$ pour tout $(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

Retour sur l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y discrètes sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X=x] \cap [Y=y]) = P([X=x])P([Y=y])$.
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	• Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{B}(n_1,p)$ et $\mathcal{B}(n_2,p)$, alors $X_1+X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$. • Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1+X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.
Loi d'une variable aléatoire $Z=g(X,Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X,Y).	On se limitera à des cas simples tels que $\min(X,Y),\ \max(X,Y),\ X+Y$.
Espérance de $Z=g(X,Y)$ et théorème de transfert.	Sous réserve de convergence absolue : $$E(Z) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P([X=x]\cap[Y=y]).$$ Résultat admis, qui peut a posteriori justifier la linéarité de l'espérance.
Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY)=E(X)E(Y)$. On pourra admettre ce résultat.

5 - Convergences et approximations

Il s'agit dans cette partie de familiariser les étudiants avec ces notions, sans définir la convergence en probabilité ni la convergence en loi.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour les variables aléatoires discrètes.	Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\lambda>0$: $$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}.$$ Pour toute variable aléatoire X admettant espérance et variance, pour tout $\varepsilon>0$: $$P(\lvert X-E(X)\rvert \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Loi faible des grands nombres.

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi qui admettent une espérance m et une variance, et si $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

▶

La loi faible des grands nombres appliquée à des variables de Bernoulli permet de conforter l'approche intuitive de probabilité d'un événement

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ alors pour tout k entier naturel :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

où X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

▶

Enseignement annuel d'informatique et algorithmique

L'objectif est d'assoir les connaissances des étudiants en algorithmique et de les entraîner à l'utilisation de l'informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.

Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, et seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le langage retenu pour la programmation dans le programme des classes économiques et commerciales, option mathématiques approfondies , est Python.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes introduites en figurant dans la sous-partie « Commandes exigibles » sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du langage, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. De nouvelles commandes Python peuvent donc être introduites, mais cela devra se faire avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique des connaissances mathématiques. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de « copier-coller » qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

Seules les notions de Python indiquées dans le programme sont exigibles. La syntaxe précise des commandes devra être rappelée.

1 - Programmation d'algorithmes et de fonctions

`if ...:` `    ...`	Structures conditionnelles.
Emploi de `else, elif`	

`for k in range(a,b):`
`for k in T:`
`while ...:`
	`T` peut être une matrice, un vecteur, une chaîne de caractères. Les commandes `break` et `continue` ne sont pas exigibles.

`def f(x,y):`
`    ...`
`    return ...`
	Définition d'une fonction.

2 - Commandes exigibles

Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation. Il n'y a pas lieu d'introduire en première année les commandes qui relèvent de notions de seconde année.

a) Disponibles de base dans Python

Affectation : `nom = expression`	L'expression peut être du type numérique, booléen, matriciel (ndarray) ou chaîne de caractères.
`#` permet d'insérer un commentaire	Les étudiants doivent savoir faire un usage judicieux des commentaires.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

b) Dans la librairie `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.array, np.zeros, np.ones, np.eye,` `np.linspace, np.arange`	Création de vecteurs et de matrices. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison de deux matrices (`M == N`), comparaison d'une matrice et d'un nombre (`M>=1`).
`a,b = np.shape(M)`	Taille de la matrice `M`.
`np.dot, np.transpose`	Syntaxes exigibles : `np.transpose(M)`, `np.dot(M1,M2)`. L'usage de méthode comme `M.transpose()`, `M1.dot(M2)` est non-exigible.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean,` `np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`
`np.exp, np.log, np.sin, np.cos,` `np.sqrt, np.abs, np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. On pourra utiliser la commande `f = np.vectorize(f)` mais elle n'est pas exigible.
`np.e, np.pi`	

c) Dans la librairie `numpy.linalg`

Exemple d'importation : `import numpy.linalg as al`

`al.inv, al.rank, al.matrix_power,`
`al.solve, al.eig`

d) Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random`, `rd.binomial`, `rd.randint`, `rd.geometric`, `rd.poisson`, `rd.exponential`, `rd.normal`, `rd.gamma`	On utilisera ces fonctions pour générer un nombre aléatoire ou bien un vecteur ou une matrice à coefficients aléatoires. Exemple : `rd.binomial(10,0.2)`, `rd.binomial(10,0.2,100)`, `rd.binomial(10,0.2,[100,10])`

e) Dans la librairie `scipy.special`

Exemple d'importation : `import scipy.special as sp`

`sp.ndtr`	Fonction Φ

f) Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot`, `plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes `xlim`, `ylim`, `axis`, `grid`, `legend` mais elles ne sont pas exigibles.
`plt.hist`	La maîtrise des options de cette fonction n'est pas exigible.
`plt.contour`	Tracés de lignes de niveau en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.
`plt.quiver`	Tracés de gradients en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.

g) Utilisation de la fonction `Axes3D`

Exemple d'importation :

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
ax = Axes3D(plt.figure())
```

`ax.plot_surface`	Représentation de surfaces en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.

3 - Liste de savoir-faire exigibles en première année

Représentation graphique d'une fonction.

Calcul des termes et représentation graphique d'une suite.	Représentation des points (n, u_n). Pour une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, représentation des termes de la suite à partir du graphe de f.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite ou de la somme d'une série.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.	On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).
Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.	Pour des fonctions f à primitive F connue, on pourra vérifier expérimentalement le lien entre primitive et intégrale, en comparant $F(b)-F(a)$ avec une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires.	On pourra simuler ainsi des lois binomiale et géométrique.
Simulation d'échantillons de lois usuelles.	On pourra utiliser les fonctions `rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson`
Série statistique associée à un échantillon.	Fréquences, fréquences cumulées, histogramme. Moyenne, médiane. Variance et écart-type empiriques. Sur les loi usuelles, on pourra faire un lien entre fréquences et loi, fréquences cumulées et fonction de répartition, moyenne et espérance, variance empirique et variance. On pourra comparer expérimentalement les lois $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ et $\mathcal{P}(\lambda)$.
Approche expérimentale de la loi de Gauss.	On pourra superposer la courbe de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ et l'histogramme d'un échantillon de $\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
Calcul approché d'une probabilité.	Approche intuitive de l'estimation : si $P(A)$ est difficile à calculer, on peut simuler N fois l'expérience et assimiler $P(A)$ à la fréquence de réalisation de A.
Résolution de systèmes $MX = B$.	On pourra programmer l'algorithme du pivot de Gauss sur un exemple. En pratique on utilisera plutôt la fonction `al.solve`.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques approfondies – informatique de la classe d'ECG 2nde année

Table des matières

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif de la formation dans les classes préparatoires économiques et commerciales n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement de ces classes et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.
Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC de mathématiques approfondies se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie et gestion dispensés en Grande École ou en troisième année de Licence à l'université.

Il s'organise autour de quatre points forts :

- En algèbre linéaire et bilinéaire, on introduit la réduction des endomorphismes et des matrices carrées ainsi que les structures euclidiennes. Ces notions d'algèbre linéaire trouveront des applications en analyse lors de l'optimisation des fonctions de plusieurs variables, mais aussi en probabilités et en analyse de données (statistiques descriptives bivariées).
- En analyse, on complète l'étude des intégrales généralisées débutée en première année de classe préparatoire et on introduit les fonctions de plusieurs variables définies sur $\mathbf{R}^n$ ainsi que la notion de gradient. Au quatrième semestre, on poursuit cette étude dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes, cruciaux en économie et en finance.
- En probabilités, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, les notions sur les variables aléatoires à densité sont complétées. L'ensemble des notions sera présenté en lien avec la simulation informatique des phénomènes aléatoires. Un des objectifs est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse (et une compréhension plus aboutie) des méthodes de l'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance.
- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche d'extrema en analyse ou de différentes techniques d'estimation.

Au fur et à mesure de la progression, on aura à cœur de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera avec pertinence l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées.
Les travaux pratiques de mathématiques avec Python sont organisés autour de quatre thèmes faisant intervenir divers points du programme de mathématiques. L'objectif est d'apprendre aux étudiants à utiliser Python de manière judicieuse et autonome ainsi que de leur permettre d'illustrer ou de modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques. Les savoir-faire et compétences que les étudiants doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme. L'enseignement de ces travaux pratiques se déroulera sur les créneaux horaires dédiés à l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Algèbre linéaire et bilinéaire

1 - Compléments d'algèbre linéaire

a) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Dimension d'une somme directe de k espaces vectoriels.	Base adaptée à une somme directe.
Concaténation de bases de sous espaces vectoriels.	Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases.

b) Changement de base

Matrice d'un endomorphisme dans une base.	Rappels.
Matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.	Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.	
Formules de changement de base.	$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\ P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Matrices semblables.	Deux matrices A et B carrées sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. A et B sont semblables si et seulement si elles représentent les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

c) Trace

La trace d'une matrice carrée est introduite uniquement comme outil simple et efficace en vue de la recherche de valeurs propres. Tout développement théorique est exclu. Aucun autre résultat concernant la trace n'est au programme.

Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace et $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.	Notation $\mathrm{Tr}(A)$.
Invariance de la trace par changement de base.	$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$.

2 - Éléments propres des endomorphismes et des matrices carrées, réduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont définis sur $\mathbf{R}$. *Dans toute cette partie,* f *désignera un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie, et* A *une matrice carrée.*

a) Vecteurs propres et espaces propres

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme de E et d'une matrice carrée.	Valeurs propres des matrices triangulaires.
Spectre d'un endomorphisme et d'une matrice carrée.	Notations $\mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{Sp}(A)$.
Si Q est un polynôme, obtention d'éléments propres de $Q(f)$ à partir d'éléments propres de f.	Si $f(x) = \lambda x$ alors $Q(f)(x) = Q(\lambda)x$. Si $AX = \lambda X$ alors $Q(A)X = Q(\lambda)X$.

b) Recherche d'éléments propres

Polynômes annulateurs d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	On pourra donner les exemples des homothéties, des projecteurs et des symétries.
Si Q est un polynôme annulateur de f (respectivement A) et λ une valeur propre de f (respectivement A), alors λ est racine de Q.	
Tout endomorphisme d'un espace de dimension finie admet au moins un polynôme annulateur non nul. Toute matrice carrée admet au moins un polynôme annulateur non nul.	Aucune autre connaissance sur les polynômes annulateurs ne figure au programme.

c) Propriétés générales

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie admet un nombre fini de valeurs propres et ses sous-espaces propres sont en somme directe.	$\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \leqslant \dim(E)$.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E.	En particulier, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres.

d) Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E composée de vecteurs propres de f.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est alors une matrice diagonale.

Caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.

f est diagonalisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(f)} \dim\ker(f-\lambda \mathrm{Id}_E) = \dim(E)$.

f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de f.

Si $\dim(E) = n$, tout endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Matrices diagonalisables, diagonalisation d'une matrice carrée.

Interprétation matricielle des résultats précédents.
A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Application au calcul des puissances d'une matrice carrée.

3 - Algèbre bilinéaire

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions fondamentales de l'algèbre bilinéaire dans le cadre euclidien, utilisées en particulier lors de l'étude des fonctions de n variables. L'étude des endomorphismes symétriques sera faite au quatrième semestre.

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont des $\mathbf{R}$*-espaces vectoriels. On identifiera* $\mathbf{R}$ *et* $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$.

a) Produit scalaire

Produit scalaire, norme associée.

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.
Produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$; exemples de produits scalaires.

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Cas de l'égalité.

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux.

Familles orthogonales, familles orthonormales ou orthonormées.

On ne considèrera que des familles finies.
Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Théorème de Pythagore.

b) Espaces euclidiens

Dans ce paragraphe x, y désignent des vecteurs d'un espace vectoriel et X, Y sont les colonnes coordonnées correspondantes dans une base.

Espace euclidien.	Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$, muni d'un produit scalaire.
Existence de bases orthonormées.	On pourra introduire la méthode de l'orthonormalisation de Schmidt sur des exemples en petite dimension, mais cette méthode n'est pas exigible.
Coordonnées et norme d'un vecteur dans une base orthonormée.	$$x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \ , \ \|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2.$$
Expression matricielle du produit scalaire et de la norme euclidienne en base orthonormée.	$$\langle x, y \rangle = {}^tXY \ ; \ \|x\|^2 = {}^tXX.$$
Changement de bases orthonormées.	La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est orthogonale : $P^{-1} = {}^tP$. Aucune autre connaissance sur les matrices orthogonales n'est au programme.
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel.	Notation $F^{\perp}$.
Complétion d'une famille orthonormée en une base orthonormée.	

II - **Fonctions réelles définies sur $\mathbf{R}^n$**

1 - Introduction aux fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$

Au troisième semestre, l'objectif est de confronter les étudiants à la notion de fonction réelle de n variables, aux principales définitions tout en évitant les problèmes de nature topologique. C'est pourquoi le domaine de définition des fonctions sera systématiquement $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. L'étude de la continuité d'une fonction en un point pathologique est hors programme, ainsi que l'étude des recollements de formules lorsque f est définie sur $\mathbf{R}^n$ par plusieurs formules.
Dès que possible, les notions introduites seront illustrées à l'aide de la libraire matplotlib.pyplot de Python.

Fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.	On donnera de nombreux exemples de fonctions de 2, 3 ou n variables réelles. Les fonctions polynomiales de n variables donnent des exemples simples de fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$.
Équation du graphe d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$.	Cas des fonctions affines de n variables.
Lignes de niveau pour les fonctions de deux variables.	On se limitera à des exemples simples.

Continuité d'une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.	Une fonction f, définie sur $\mathbf{R}^n$, est continue au point x_0 de $\mathbf{R}^n$ si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\|x - x_0\| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. f est continue sur $\mathbf{R}^n$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathbf{R}^n$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur ce sujet. On mettra en avant l'analogie avec la notion de continuité des fonctions d'une variable vue en première année. Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur $\mathbf{R}^n$. Résultat admis.
Opérations sur les fonctions continues.	Somme, produit, quotient. La composition d'une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue de I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue. Résultats admis.

2 - Calcul différentiel

L'introduction des notions différentielles concernant les fonctions numériques de plusieurs variables réelles se fait en se limitant aux fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$. La détermination de la classe d'une fonction n'est pas au programme.
La recherche d'extremum est abordée ici, jusqu'à la condition nécessaire du premier ordre.

Les fonctions sont désormais supposées définies et continues sur $\mathbf{R}^n$.

a) Dérivées partielles, gradient

Fonctions partielles en un point.	
Dérivées partielles d'ordre 1.	Notation $\partial_i f$.
Gradient en un point x.	Notation $\nabla f(x)$. $\nabla f(x)$ est l'élément de $\mathbf{R}^n$ égal à $(\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$.
Dérivées partielles d'ordre 2.	Notation $\partial^2_{i,j} f$.
Fonctions de classe C^1 et C^2 sur $\mathbf{R}^n$.	Les fonctions polynomiales de n variables sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}^n$. Résultat admis.
Opérations sur les fonctions de classe C^1 et C^2.	Somme, produit, quotient. La composition d'une fonction de classe C^1 [resp. C^2] sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction de classe C^1 [resp. C^2] sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est de classe C^1 [resp. C^2]. Résultats admis.
Pour une fonction de classe C^1 : existence et unicité d'un développement limité d'ordre 1 en un point.	$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(0) = 0$ et ε continue en 0. Résultat admis.
Si f est de classe C^1, dérivée de la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(t) = f(x + th)$.	$g'(t) = \langle \nabla f(x + th), h \rangle$ et donc $g'(0) = \nabla f(x_0)$. Interprétation géométrique du gradient.

b) Recherche d'extremum : condition d'ordre 1

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.

Condition nécessaire du premier ordre.
Point critique.

Si une fonction f de classe C^1 sur $\mathbf{R}^n$ admet un extremum local en un point x, alors $\nabla f(x) = 0$.
Les points où le gradient s'annule sont appelés points critiques.

III - Compléments de probabilités ; couples et n-uplets de variables aléatoires réelles

L'objectif est double :

- *d'une part, consolider les acquis de première année concernant les variables aléatoires discrètes, et enrichir le champ des problèmes étudiés, avec, en particulier, l'étude simultanée de variables aléatoires (vecteurs aléatoires de $\mathbf{R}^n$) ;*
- *d'autre part, effectuer une étude élémentaire des lois continues usuelles discrètes ou à densité.*

On fera des liens entre certaines lois dans le cadre des approximations et des convergences, ainsi que les liens entre statistique et probabilités dans le cadre de l'estimation.

La théorie des familles sommables n'est pas au programme. Aucune difficulté concernant la dénombrabilité ne sera soulevée (on pourra si besoin admettre que $\mathbf{N}^k$ est dénombrable.) On admettra le théorème suivant :
Soit I un ensemble dénombrable infini, indexé par $\mathbf{N}$ sous la forme $I = \{\varphi(n); n \in \mathbf{N}\}$ où φ est une bijection de $\mathbf{N}$ dans I. Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation φ, et pourra également être notée $\sum\limits_{i \in I} u_i$. L'étude de cette convergence n'est pas un objectif du programme. On dira alors que la série est absolument convergente (ou converge absolument). Toutes les opérations (somme, produit, regroupement par paquets, etc.) sont alors licites. Aucune difficulté ne sera soulevée sur ces notions, qui ne sont pas exigibles des étudiants, et tout exercice ou problème y faisant référence devra impérativement les rappeler.

1 - Compléments sur les variables aléatoires réelles

a) Généralités sur les variables aléatoires réelles

On rappellera la signification de la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Définition d'une variable aléatoire.

Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application $X : \Omega \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout x dans $\mathbf{R}$, $[X \leq x]$ est un événement.
Le fait de vérifier qu'une fonction est une variable aléatoire n'est pas un des objectifs du programme.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Loi d'une variable aléatoire	C'est la donnée des probabilités $P(X \in I)$ où I est intervalle. La loi est caractérisée par la fonction de répartition.
Une combinaison linéaire, un produit de variables aléatoires sont des variables aléatoires. Le maximum et le minimum de variables aléatoires sont des variables aléatoires.	Résultat admis.

b) Espérance et conditionnement pour les variables aléatoires discrètes

Espérance conditionnelle.	Si A est un événement de probabilité non nulle, $E(X/A)$ est l'espérance de X, si elle existe, pour la probabilité conditionnelle P_A.
Formule de l'espérance totale.	Soit X une variable aléatoire discrète, soit (A_n) un système complet d'événements tels que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $P(A_n) \neq 0$. Alors X admet une espérance pour P si et seulement si : — pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'espérance conditionnelle $E(X/A_n)$ existe ; — la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} E(\lvert X\rvert/A_n)P(A_n)$ converge. Dans ce cas, $E(X) = \sum_{n\in\mathbf{N}} E(X/A_n)P(A_n)$.

2 - Introduction aux variables aléatoires à densité

a) Densités et fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition d'une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$.	Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une densité de probabilité lorsqu'elle est continue sauf en nombre fini de points, positive et vérifie : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$
Définition d'une variable aléatoire à densité.	On dit qu'une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points. Toute fonction égale à F'_X sauf éventuellement en un nombre finie de point est une densité de probabilité et on dit que c'est une densité de X. Pour tout x de $\mathbf{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire à densité par la donnée d'une densité f_X. Toute densité de probabilité sur $\mathbf{R}$ est la densité d'une variable aléatoire.	Résultat admis.

Transformation affine d'une variable à densité.	Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et la densité de $aX + b$ ($a \neq 0$).
Exemples simples de calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.	Les étudiants devront savoir retrouver les lois de X^2 et $\varphi(X)$ avec φ de classe C^1 strictement monotone sur $X(\Omega)$.

b) Espérance des variables aléatoires à densité

Espérance d'une variable aléatoire à densité. Variables aléatoires centrées.	Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $E(X)$ est égale à cette intégrale. Exemple de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.
Linéarité et croissance de l'espérance pour les variables aléatoires à densité.	Résultat admis.
Existence d'espérance par domination.	Résultat admis.
Théorème de transfert.	Si X est une variable aléatoire ayant une densité f_X nulle en dehors de l'intervalle $]a, b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si g est une fonction continue sur $]a, b[$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, $E(g(X))$ existe et est égale à $\displaystyle\int_a^b g(t) f_X(t)\mathrm{d}t$ si et seulement si cette intégrale converge absolument. On pourra admettre ou démontrer ce résultat dans le cas où g est de classe C^1, avec g' strictement positive (ou strictement négative) et le vérifier dans des cas simples. Cette démonstration n'est pas exigible.

3 - Lois de variables aléatoires à densité usuelles

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$. $$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \Longleftrightarrow a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b].$$
Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. $$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad (\lambda > 0).$$
Loi normale centrée réduite, loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales.	Si X suit une loi normale, et si a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, alors la variable aléatoire $aX + b$ suit également une loi normale. Si $\sigma > 0$, $$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Pour tout réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Exemples d'utilisation de la table de la loi normale et interprétation graphique.
On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. ▶

Lois γ. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi γ.

X suit une loi $\gamma(\nu)$, avec $\nu > 0$, si X admet comme densité :

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

avec $\Gamma(\nu) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$. Pour le calcul des moments de la loi γ, on pourra établir $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier n de $\mathbf{N}$.

4 - Variance des variables aléatoires à densité

Variance, écart-type. Variables aléatoires centrées, centrées réduites.
Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle (uniforme sur un intervalle, exponentielle, normale).

On admettra que l'existence de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire X est équivalente à l'existence de $E(X^2)$.

Illustrations avec les lois usuelles.
On pourra donner un exemple de variable aléatoire n'admettant pas de variance.

5 - n-uplets de variables aléatoires réelles ; généralisation des propriétés de l'espérance et de la variance

Dans cette partie, on étend la notion de loi de couple de variables aléatoires discrètes vue en première année à un vecteur aléatoire, puis, de manière intuitive, la notion d'espérance à une somme de variables aléatoires admettant chacune une espérance. La définition de l'espérance générale ou des moments d'une variable aléatoire dans un cadre quelconque n'étant pas au programme, toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques.
L'étude, pour $n > 2$, de n-uplets à composantes non indépendantes n'est pas un objectif du programme.

a) Généralisation

Loi d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Loi marginale.	La loi d'un vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles est donné par la fonction $F_{(X_1,\ldots,X_n)}$ définie sur $\mathbf{R}^n$ par : $F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x_i]\right)$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion.
Caractérisation de la loi d'un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.	
Si deux vecteurs $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ ont même loi et si g est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, alors les variables aléatoires réelles $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ ont même loi.	Aucune difficulté ne sera soulevée. Résultat admis.

b) Indépendance

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles.	X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes si et seulement si : $F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k)$ pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$.
Caractérisation de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles.	X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes si et seulement si : $P\left(\left[\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i \in I_i\right]\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} P([X_i \in I_i])$ pour tous intervalles I_1, ..., I_n de $\mathbf{R}$. Résultat admis.
Caractérisation de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} P([X_i = x_i])$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$. Résultat admis.
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2},..., X_n. Résultat admis.

c) Le cas particulier du couple

On généralisera les notions de linéarité, de croissance et d'existence par domination de l'espérance à des variables aléatoires quelconques.	Résultats admis
Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Résultats admis.

Covariance de deux variables aléatoires admettant une variance. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Bilinéarité, symétrie, positivité de la covariance.
Formule de Huygens.	$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
Variance d'une somme.	$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.
Cœfficient de corrélation linéaire. Propriétés.	Notation $\rho(X, Y)$. $\lvert\rho(X, Y)\rvert \leqslant 1$. Interprétation dans le cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.
Si X et Y sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle.	La réciproque est fausse.
Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, $X+Y$ admet une variance et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Résultats admis.

d) Sommes de variables aléatoires indépendantes

Densité de la somme $Z = X + Y$ de deux variables aléatoires à densité indépendantes, produit de convolution.	Si la fonction h définie par la relation $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points, c'est une densité de Z. C'est le cas si f_X (ou f_Y) est bornée.
Stabilité de la loi γ pour la somme.	Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)$.
Loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.	Pour étudier la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on se ramènera après multiplication par λ à une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.
Stabilité de la loi normale pour la somme.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - **Compléments d'algèbre bilinéaire**

1 - Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien, matrices symétriques

Endomorphismes symétriques.

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien E est symétrique si et seulement si pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :
$$\langle f(x)\ ,\ y\rangle \ = \ \langle x\ ,\ f(y)\rangle.$$

Un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.
Si f est un endomorphisme symétrique et si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^{\perp}$ est stable par f.

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique f d'un espace vectoriel de dimension finie sont deux à deux orthogonaux.

Si $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ sont p vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique f associés à des valeurs propres distinctes, alors la famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille orthogonale.

2 - Projection orthogonale

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F.

Notation p_F.

Si $(u_1, \ldots, u_k)$ est une base orthonormée de F, alors :
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle u_i.$$

Si p est un projecteur, alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.

Caractérisation par minimisation de la norme.

$$v = p_F(x) \Longleftrightarrow \|x - v\| = \min_{u\in F} \|x - u\|.$$
Application au problème des moindres carrés et à la droite de régression : minimisation de $\|AX - B\|$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ de rang p, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$.
Résultats non exigibles.

3 - Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques

Si E est un espace vectoriel euclidien, tout endomorphisme symétrique de E est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Résultat admis.
Si f est un endomorphisme symétrique, il existe une base $\mathcal{B}$ de E orthonormée composée de vecteurs propres de f.

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable avec une matrice de changement de base orthogonale.

Si A est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$.

II - Fonctions réelles de n variables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$; recherche d'extrema

L'objectif est de présenter la démarche de recherche d'extrema et d'en acquérir une maîtrise raisonnable à partir d'un minimum d'outils théoriques. L'espace $\mathbf{R}^n$ sera muni de la norme euclidienne usuelle.
La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme ; elle devra toujours être précisée. Néanmoins, il est nécessaire de sensibiliser les étudiants aux notions d'ouverts et de fermés. Les étudiants ont été familiarisés avec les fonctions continues sur $\mathbf{R}^n$ au troisième semestre, aussi on s'appuiera, pour mener une initiation à la topologie de $\mathbf{R}^n$, sur les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ définis par des inégalités du type $\{x \in \mathbf{R}^n/\varphi(x) < a\}$ ou $\{x \in \mathbf{R}^n/\varphi(x) \leqslant a\}$ où φ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$. On donnera également la définition d'un ensemble borné.

L'étude de fonctions de n variables à valeurs dans $\mathbf{R}$ se limitera à des fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ pouvant être définis simplement (réunion, intersection finies) à l'aide des ensembles fermés ou ouverts précédents.

Les résultats seront énoncés dans le cas de fonctions de n variables. Pour les démonstrations, on pourra se limiter aux cas $n = 2$ ou $n = 3$.
Aucune des démonstrations de ce chapitre n'est exigible des étudiants.

Dans ce paragraphe, h désigne un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et H la colonne coordonnée correspondante.

1 - Fonction de n variables définies sur une partie de $\mathbf{R}^n$

Dans ce paragraphe, on étend à des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, les notions et définitions vues au troisième semestre pour des fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$. Toute difficulté concernant la détermination de la classe d'une fonction est exclue.

Extension de la notion de continuité aux fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$.

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

Extension de la notion de fonctions C^1 et C^2 aux fonctions définies sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^n$.

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.
Extension des notions, vues au troisième semestre, de dérivées partielles d'ordre 1 et 2, gradient, développement limité d'ordre 1, opérations sur les fonctions de classe C^1 ou C^2.

2 - Compléments sur les fonctions de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$

Matrice hessienne en un point x.

Notation $\nabla^2 f(x)$.

Théorème de Schwarz.

Si f est de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$, alors la matrice hessienne est symétrique en tout point de $\mathcal{O}$.
Résultat admis.

Fonction quadratique définie sur $\mathbf{R}^n$ associée à une matrice symétrique réelle A.

$q(h) = {}^tHAH$.
On remarquera qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que si h a pour coordonnées $h_1, \ldots, h_n$ dans $\mathcal{B}$ on a :

$$q(h) = \sum \lambda_i h_i^2,$$

où $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

Existence et unicité d'un développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$.

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} q_x(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$
où $\varepsilon(0) = 0$, ε continue en 0 et q_x est la fonction quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$.
Résultat admis.

Si f est de classe C^2, dérivée seconde de la fonction g définie au voisinage de 0 par :
$$g(t) = f(x+th).$$

$g''(t) = q_{x+th}(h)$ où q_{x+th} est la fonction quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 f(x+th)$ et donc $g''(0) = q_x(h)$.

3 - Recherche d'extrema

Dans un premier temps, on étendra rapidement les notions vues au troisième semestre à une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$.

a) Définition

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.

b) Extrema sur un ensemble fermé borné

Une fonction continue sur une partie fermée bornée admet un maximum global et un minimum global.

Résultat admis.

c) Condition d'ordre 1

Condition nécessaire du premier ordre.
Point critique.

Si une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^n$ admet un extremum local en un point x_0 de $\mathcal{O}$, alors $\nabla f(x_0) = 0$.
Les points où le gradient s'annule sont appelés points critiques.

d) Condition d'ordre 2

Étude locale d'une fonction f de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ en un point critique.

Si x_0 est un point critique de f :

- si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbf{R}_+^*$, alors f admet un minimum local en x_0,
- si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbf{R}_-^*$, alors f admet un maximum local en x_0,
- si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0))$ contient deux réels non nuls de signes distincts, f n'admet pas d'extremum en x_0.

On fera le lien avec le signe de la fonction quadratique q_{x_0} associée à la hessienne de f en x_0.

Point selle (ou col).

Une condition suffisante d'extremum global.

Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et si x_0 est un point critique de f :

- si pour tout $x \in \Omega$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbf{R}^+$, alors f admet un minimum global en x_0,
- si pour tout $x \in \Omega$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbf{R}_-$, alors f admet un maximum global en x_0,

On introduira la notion d'ouvert convexe sans soulever aucune difficulté théorique et la vérification de cette propriété n'est pas un objectif du programme.
On admet ce résultat.

e) Recherche d'extrema sous contrainte d'égalités linéaires

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des solutions d'un système linéaire $\begin{cases} g_1(x) & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ g_p(x) & = b_p \end{cases}$ *et $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions du système homogène associé.*

Condition nécessaire du premier ordre sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$, et si la restriction de f à $\mathcal{C}$ admet un extremum local en un point x_0, alors $\nabla f(x_0)$ est dans $\mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_p(x_0))$.
On remarquera que :

— $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_p(x_0))$.
— Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ réels tels que :

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x_0).$$

Point critique pour l'optimisation sous contrainte.
Exemples de recherche d'extrema globaux sous contrainte d'égalités linéaires dans des cas simples.

III - **Probabilités : convergences, estimation**

1 - Convergences et approximations

a) Convergence en probabilité

On pourra rappeler l'inégalité de Markov et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vues en première année.	
Convergence en probabilité.	La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers X si : $\forall\varepsilon>0,\quad \lim\limits_{n\to+\infty} P([\lvert X_n-X\rvert\geqslant\varepsilon])=0.$ Notation $X_n \xrightarrow{P} X$.
On pourra énoncer la loi faible des grands nombres en terme de convergence en probabilité.	
Composition par une fonction continue.	Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, alors $f(X_n)\xrightarrow{P} f(X)$. Résultat admis.
Convergence en probabilité et somme.	Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$ alors $X_n+Y_n \xrightarrow{P} X+Y$.

b) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires vers X.	Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si en tout point de continuité x de F_X : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)=F_X(x).$ On illustrera cette définition à l'aide des approximations vues en première année.
Cas où les X_n et X prennent leurs valeurs dans $\mathbf{N}$.	La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si : $\forall k\in\mathbf{N},\quad \lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n=k])=P([X=k]).$
Composition par une fonction continue.	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X et si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, alors $(f(X_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers $f(X)$. Résultat admis.

Théorème limite central.

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2 non nulle, si on note : $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, alors la suite de variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

D'où, on a pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} P([a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

Résultats admis.

Exemples d'approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale.

Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

2 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$ (éventuellement de $\mathbf{R}^2$). Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la vraie valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ), à partir d'un échantillon de données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1, \ldots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de $g(\theta)$.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ où $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un estimateur de $g(\theta)$ et

$(x_1, \ldots, x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $\theta = p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de $g(\theta)$. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ observé.
Exemples simples d'estimateurs.	Exemple de la moyenne empirique $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
Exemples simples d'estimations.	

b) Intervalle de confiance

S'il existe des critères pour juger des qualités d'un estimateur ponctuel T_n de $g(\theta)$, aucune certitude ne peut jamais être apportée quant au fait que l'estimation donne la vraie valeur à estimer.
La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle aléatoire qui contienne $g(\theta)$ avec une probabilité minimale donnée. Dans tout ce paragraphe, $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ désigneront deux suites d'estimateurs de $g(\theta)$ telles que pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $n \geqslant 1$, $P_\theta([U_n \leqslant V_n]) = 1$.

Intervalle de confiance.	Soit $\alpha \in [0, 1]$. $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ si pour tout θ de Θ, $$P_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1 - \alpha.$$ L'utilisation dans certains cas du théorème limite central impose d'introduire la notion d'intervalle de confiance asymptotique. Sa réalisation est l'estimation de cet intervalle de confiance. Les variables aléatoires X_n seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ. On éclairera ces notions à l'aide de simulations informatiques.
Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi de Bernoulli.	En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart type est connu.	On pourra utiliser cet exemple pour introduire la variance empirique.

c) Estimation par intervalle de confiance asymptotique

Intervalle de confiance asymptotique.	On appelle intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ une suite $([U_n, V_n])_{n\geqslant 1}$ vérifiant : pour tout θ de Θ, il existe une suite de réels (α_n) à valeurs dans $[0,1]$, de limite α, telle que pour tout $n \geqslant 1$, $$P_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha_n.$$ Par abus de langage on dit aussi que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique.
Intervalles de confiance asymptotiques obtenus avec le théorème central limite.	Exemple du paramètre d'un loi de Bernoulli. On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation normale de la loi binomiale.

d) Comparaison des estimateurs

La notion de risque quadratique n'est pas au programme.

Estimateur sans biais.	L'estimateur T_n de $g(\theta)$ est sans biais si pour tout θ de Θ, $E_\theta(T_n) = g(\theta)$.
Suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ d'estimateurs.	Chaque T_n est de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Estimateur convergent.	Une suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de $g(\theta)$ est convergente si pour tout θ, la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $g(\theta)$. Par abus de langage, on dit aussi que l'estimateur est convergent. On rappellera que si $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $g(\theta)$ et si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, alors $(f(T_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $f(g(\theta))$.
Condition suffisante de convergence.	Une suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de $g(\theta)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n) = g(\theta)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$ est convergente. Cette convergence pourra être étudiée à l'aide de l'inégalité de Markov. La démonstration de ce théorème donne naturellement un intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ ainsi qu'un moyen de comparer la qualité des estimateurs. On illustrera en informatique ces notions $\boxed{\blacktriangleright}$.

TRAVAUX PRATIQUES DE MATHÉMATIQUES AVEC PYTHON

En première année, les élèves ont acquis les bases de manipulation du logiciel Python. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année est de permettre aux étudiants d'utiliser Python de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, etdés que seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le programme d'informatique s'articule autour de quatre thèmes : statistiques descriptives bivariées, fonctions de plusieurs variables, simulation de lois, estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Dans certains thèmes, il s'avérera nécessaire d'introduire de nouvelles notions ou approches mathématiques. Celles-ci devront être explicitées en préambule des séances d'informatique et ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants. Certaines seront propres à un thème particulier, d'autres (comme par exemple les méthodes de Monte-Carlo) pourront au contraire être envisagées de manière transversale. Toutes les précisions nécessaires devront toujours être données lors de leur utilisation.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules certaines fonctions et commandes sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du langage, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. De nouvelles commandes Python peuvent donc être introduites, mais cela devra se faire avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique des connaissances mathématiques. Dans les sujets, les commandes introduites devront être présentées en préambule et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation et leur interprétation. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de « copier-coller »qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

I - **Liste des exigibles**

1 - Commandes

Les commandes exigibles ont été listées dans le programme de première année. On rappellera dans les sujets toutes les syntaxes des commandes non exigibles.

2 - Savoir-faire et compétences

C1 : Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique (simple, double) ou d'une loi.

C2 : Modéliser et simuler des phénomènes (aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique.

C3 : Représenter et exploiter le graphe d'une fonction d'une, deux variables.

C4 : Représenter et interpréter différents types de convergences.

C5 : Utiliser la méthode de Monte-Carlo sur des exemples pertinents (calcul approché d'intégrales, de probabilités).

C6 : Porter un regard critique sur les méthodes d'estimation et de simulation.

II - **Liste des thèmes**

1 - Statistiques descriptives bivariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1** et **C6**)

Série statistique à deux variables, nuage de points associé.
Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage.
Covariance et cœfficient de corrélation empiriques, droites de régression.

On tracera le nuage de points et les droites de régression et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire. On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer.

2 - Fonctions de plusieurs variables

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C2** et **C3**)

Graphe d'une fonction de deux variables, lignes de niveau, plan affine tangent au graphe. Dérivées partielles et dérivées directionnelles, représentation du gradient.
Position du graphe par rapport au plan affine tangent au graphe, lien avec les valeurs propres de la matrice hessienne, points selles. Étude d'extrema locaux et globaux. Extrema sous contrainte linéaire.

À cette occasion, on pourra mettre en évidence l'orthogonalité du gradient avec les tangentes aux lignes de niveau du graphe d'une fonction de deux variables.
Programmation de fonctions variées permettant de mettre en évidence les notions d'extrema locaux ou globaux, avec ou sans contrainte. On pourra prendre des exemples issus de l'économie ou de la finance.

3 - Simulation de lois

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, **C3** et **C6**)

Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique et la comparer à la fonction de répartition théorique.

Méthode d'inversion.

Application de la méthode d'inversion pour la simulation par exemple des lois exponentielles ou de Cauchy.
On pourra mettre en évidence, grâce aux simulations, qu'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy n'admet pas d'espérance.

Méthodes de simulation d'une loi géométrique.	Utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation d'une loi exponentielle et de la fonction `floor`, utilisation de la librairie `numpy.random`.
Simulations informatiques d'une loi normale par utilisation du théorème limite central appliqué à différentes lois.	Comparaison entre différentes méthodes de simulation d'une loi normale. Utilisation de la librairie `numpy.random`. On pourra s'intéresser au cas particulier de 12 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme.

4 - Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C2**, **C4**, **C5** et **C6**)

Méthode de Monte-Carlo : principe, garanties d'approximation.	Cette méthode permet d'estimer des quantités qu'il est difficile de calculer explicitement mais qu'il est facile d'approcher par simulation (probabilités d'événements, espérances de variables aléatoires). Ainsi, on pourra estimer par exemple les valeurs prises par la fonction de répartition de la somme ou du produit de deux variables aléatoires. On pourra justifier par simulation la validité de l'approche par intervalle de confiance asymptotique à partir d'un certain rang.
Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles ou créer plusieurs jeux de données par simulation. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Comparaison des intervalles de confiance d'un paramètre obtenus par différentes méthodes.	Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi de Bernoulli et de l'espérance d'une loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté • Égalité • Fraternité

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe III
Programmes d'économie, sociologie, histoire du monde contemporain
1ère et 2nde années

Programme d'Économie, Sociologie et Histoire du monde contemporain (ESH)
CPGE Économique et commerciale, voie générale (ECG)

Présentation générale

L'enseignement d'économie, sociologie et histoire vise à apporter aux étudiants les instruments d'analyse et de compréhension du monde contemporain. Pour cela, il associe trois approches complémentaires : la science économique ; l'histoire de la pensée et des faits économiques et sociaux ; la sociologie.

Cet enseignement a pour ambition de développer les compétences de synthèse, d'analyse et d'argumentation des étudiants. Ils devront maîtriser les principaux concepts, mécanismes et modèles de l'analyse économique (notamment de la microéconomie et de la macroéconomie), savoir mobiliser et mettre en perspective de façon pertinente les principaux phénomènes économiques et sociaux depuis le début du XIX^{e} siècle et maîtriser les éléments de base, les méthodes et démarches de la sociologie, plus particulièrement celles de la structure sociale, des modes de vie et des organisations.

L'étude des fondements et des analyses théoriques de l'économie et de la sociologie ne doit pas faire perdre de vue la dimension historique. Il s'agira, dans une perspective dynamique, d'expliquer les faits économiques et sociaux par l'analyse ou d'éclairer l'analyse par les faits.

Le programme est structuré en quatre modules semestriels dont le premier a pour objectif de faciliter la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, en favorisant l'adaptation des étudiants à ce nouvel enseignement.

Le premier module présente les bases et les méthodes essentielles de l'économie (de la microéconomie notamment) et de la sociologie ; il introduit une histoire de la pensée économique et sociologique. Le deuxième module traite de la croissance et du développement depuis le début du XIX^{e} siècle. Le troisième module est consacré à l'étude de la mondialisation. Le quatrième module est centré sur les modèles macroéconomiques, sur les déséquilibres et l'action des pouvoirs publics. Les professeurs pourront exercer leur liberté pédagogique en organisant comme ils le souhaitent le contenu de chaque module.

Module 1. Les fondements de l'économie et de la sociologie

Orientation générale
Ce module constitue une présentation des bases essentielles de l'économie et de la sociologie. La première partie vise à présenter les principaux acteurs de l'économie et les liens qui les unissent, dans une perspective inspirée de la comptabilité nationale. La seconde partie met l'accent sur les équilibres de marché. La troisième présente les fondements de la sociologie.

1.1/ Les fondements de l'économie

Objectifs
Il s'agira ici d'étudier le cadre général des activités économiques et l'histoire de la pensée économique pour éclairer les enjeux économiques contemporains.

1.1.1. Les acteurs et les grandes fonctions de l'économie
1.1.2. La monnaie et le financement de l'économie
1.1.3. Les grands courants de la pensée économique depuis le XVI^{e} siècle

Commentaires
On étudiera les caractéristiques des différents acteurs économiques ainsi que les opérations qui les relient. Cette approche utilisera les concepts et outils de la comptabilité nationale. On abordera ainsi la présentation du circuit économique et des agrégats de la comptabilité nationale. On mettra l'accent sur l'équilibre ressources-emplois et sa traduction dans le tableau entrées-sorties, y compris en introduisant les coefficients techniques. On mettra en évidence les relations entre secteurs institutionnels pour montrer la logique de la répartition des revenus. La construction du tableau économique d'ensemble ne sera pas exigée.
On étudiera l'évolution des formes et des fonctions de la monnaie, le processus de création monétaire et les différents modes de financement de l'économie sans analyser précisément les politiques monétaires qui seront traitées en seconde année.
Enfin on présentera les grands courants de la pensée économique depuis la naissance de l'économie politique, ainsi que les filiations entre les auteurs.

1.2/ Le comportement des agents et le fonctionnement du marché

Objectifs
Il s'agira de présenter les concepts essentiels de la démarche microéconomique, plus particulièrement les décisions de consommation et de production, et les équilibres de marché, avant d'analyser les défaillances de marché.

1.2.1. L'équilibre micro-économique du producteur et du consommateur
1.2.2. L'offre, la demande et l'équilibre du marché en concurrence parfaite
1.2.3. Les défaillances de marché

Commentaires

On étudiera la manière dont le consommateur optimise ses choix, en présentant les concepts d'utilité et de fonctions d'utilité, de courbes d'indifférences, de contrainte budgétaire et de taux marginal de substitution ; on étudiera les conséquences d'une variation de revenu ou de prix sur l'équilibre du consommateur. On définira et mesurera les élasticités. On étudiera les choix du producteur à partir d'une fonction de production, et la façon dont une variation du coût de l'un ou l'autre des facteurs de production modifie leur utilisation. On étudiera ensuite les différents types de coûts, et on montrera comment sont construites les offres de court et de long terme.
La présentation du marché concurrentiel sera l'occasion de définir l'équilibre partiel à l'aide des courbes d'offre et de demande, et de montrer comment consommateurs et producteurs réagissent à des variations de prix (effet-revenu et effet-substitution). On analysera les gains à l'échange qu'un offreur ou un demandeur peuvent tirer de leur participation au marché. On montrera les enjeux de la notion d'équilibre général.
On présentera les situations de défaillance du marché : monopole naturel, biens collectifs, biens communs, externalités et asymétries d'information.
L'étude des externalités permettra d'introduire la question des modalités de leur internalisation.

1.3/ Les fondements de la sociologie

Objectifs

Il s'agira de montrer, à travers le thème « individu et société », la nature de la contribution de la sociologie à la connaissance du social et comment elle s'est constituée comme une discipline propre, avec ses concepts, ses méthodes, ses auteurs.

1.3.1. Les grands courants de la pensée sociologique depuis le XIX^{e} siècle
1.3.2. La pluralité des méthodes sociologiques

Commentaires

On étudiera comment les sociologues se sont saisis de la question de l'antériorité de la société ou de l'individu pour construire une science sociale explicative du monde social. On montrera qu'il est nécessaire de concevoir l'individualisation comme un processus toujours à l'œuvre. On montrera, à l'aide d'exemples, que l'innovation sociologique est passée par le renouvellement théorique comme par le renouvellement des objets.
À partir de cette même question de l'individu et de la société, on montrera que les méthodes de la sociologie sont multiples (méthodes qualitatives et quantitatives) et que les outils d'enquête, nécessairement pluriels, opèrent des rapprochements avec d'autres sciences sociales (ethnologie, science politique, économie et histoire).

Module 2. Croissance et développement

Orientation générale

Ce module étudie différentes dimensions de la croissance et du développement depuis la révolution industrielle et s'interroge sur leurs conséquences. La première partie est centrée sur l'étude de la croissance et du développement. La seconde partie, qui porte sur les transformations économiques, sociales et démographiques, montrera que la croissance économique s'est accompagnée de changements importants à la fois dans l'organisation de la production, dans les structures sociales et démographiques ainsi que dans les modes de vie. La troisième partie a pour objet d'étude l'entreprise, organisation centrale de l'activité économique comme de la société, qui est à l'origine des mutations du système productif mais est également transformée par les évolutions économiques et sociales.

2.1/ La croissance et le développement depuis le XIX^{e} siècle

Objectifs

La croissance sera analysée dans sa double dimension théorique et historique depuis la révolution industrielle. On étudiera les inégalités de développement et les stratégies suivies par les pays au cours des deux derniers siècles. On s'interrogera sur la soutenabilité du développement dans un monde aux ressources finies où les contraintes environnementales pèsent de plus en plus.

2.1.1. La croissance économique
2.1.2. Inégalités et stratégies de développement
2.1.3. La soutenabilité de la croissance et du développement

Commentaires

On présentera les caractéristiques de la croissance depuis la révolution industrielle en montrant que tous les pays ne sont pas concernés en même temps et avec la même intensité. On présentera les principaux modèles d'analyse de la croissance.
On étudiera les inégalités de développement en montrant qu'elles sont évaluées à l'aune d'un modèle, celui des pays capitalistes avancés, et à travers de nombreux indicateurs. On montrera que leur appréhension n'est pas exempte de références axiologiques et qu'elle est dépendante des instruments de mesure. On montrera que ces inégalités existent entre les pays et au sein des pays.
On montrera que la diversité des stratégies de développement mises en œuvre, avec plus ou moins de réussite, pose la question de l'homogénéité du développement.
On étudiera la manière dont des contraintes nouvelles en termes d'écologie et de soutenabilité pèsent de plus en plus sur le développement de l'ensemble du monde. On réfléchira aux conditions d'un développement durable, notamment dans le domaine de la transition écologique.

2.2/ Les transformations des structures économiques, sociales et démographiques depuis le XIX^e^ siècle

Objectifs

On présentera les transformations des structures économiques, sociales et démographiques et on montrera que leurs relations avec la croissance sont complexes.

2.2.1. Les transformations des structures économiques et financières
2.2.2. Mobilité sociale et transformations des structures sociales
2.2.3. Transformations démographiques et évolution des modes de vie

Commentaires

Croissance, développement et transformations du système productif sont en interaction permanente. On étudiera l'évolution de la productivité, ainsi que les mutations des secteurs d'activité et des modes de financement depuis la révolution industrielle.
Les transformations économiques s'accompagnent de transformations de la structure sociale. La prise en compte du temps long sera nécessaire pour appréhender les évolutions des groupes sociaux et le changement social. L'analyse de la mobilité sociale nécessitera de s'interroger sur les instruments de sa mesure et la définition des populations concernées. On étudiera les trajectoires individuelles et collectives.
On présentera le mode de calcul et la signification des grands indicateurs démographiques. On étudiera les relations entre développement économique, évolution des pyramides des âges et flux démographiques.
On montrera que les modes de vie - notamment la consommation - se transforment en raison de multiples facteurs, sociologiques, démographiques et environnementaux.

2.3/ Entreprise et organisations

Objectifs

Il s'agira ici de présenter l'entreprise, son objet social, et sa place centrale dans l'activité économique.
On étudiera la stratégie des firmes et plus largement l'importance des organisations s'inscrivant dans l'évolution des sociétés contemporaines.

2.3.1. Les transformations de l'entreprise et de sa gouvernance depuis le XIX^e^ siècle
2.3.2. Concurrence imparfaite et stratégies des firmes
2.3.3. Éléments de sociologie du travail et des organisations

Commentaires

Les entreprises sont à l'origine des mutations du système productif en même temps qu'elles sont transformées par les évolutions économiques et sociales. L'analyse de la place des entreprises et des entrepreneurs doit permettre de mettre en exergue leur rôle moteur dans l'émergence des nouveaux modes productifs. On s'interrogera sur le rapport de l'entreprise à l'intérêt général.
Il conviendra de s'interroger sur la nature de la firme notamment comme mode d'allocation des ressources, sur l'efficacité des formes organisationnelles et sur les transformations des modes de gouvernance. Cette analyse des firmes permettra d'étudier leurs stratégies dans le cadre de la concurrence imparfaite (monopole, oligopole, concurrence monopolistique, cartels, abus de position dominante, barrière à l'entrée).
Les éléments de sociologie du travail et des organisations permettront d'étudier comment les individus organisent leurs relations et comment les acteurs coordonnent leurs activités. L'analyse se focalisera sur la manière dont la sociologie du travail rend compte de l'organisation du travail, des relations de travail, de la représentation des salariés, des professions et des inégalités professionnelles (sexes, statuts d'emploi). La sociologie des organisations permettra de rendre compte des questions de hiérarchie, autorité, contrôle, coordination et culture d'entreprise. On replacera l'étude du développement des organisations dans son contexte historique.

Module 3. La mondialisation économique et financière

Orientation générale
Ce module vise à étudier le phénomène de la mondialisation en rappelant ses origines historiques et en mettant l'accent sur son amplification et ses spécificités contemporaines. Aux deux premiers chapitres qui traitent des dimensions économique et financière de la mondialisation, s'ajoute un troisième portant sur l'intégration européenne, partie prenante de la dynamique de la mondialisation mais aussi expérience singulière.

3.1/ La dynamique de la mondialisation économique

Objectifs
On retracera l'histoire de l'ouverture des économies depuis le XIX^{e} siècle et on en dressera un tableau contemporain présentant les tendances majeures et les acteurs principaux. En s'appuyant sur les théories économiques, on mettra en évidence les mécanismes et les vecteurs de la mondialisation et les débats qu'elle suscite.

3.1.1. L'ouverture des économies depuis le XIX^{e} siècle : évolution et acteurs
3.1.2. L'analyse économique des échanges internationaux
3.1.3. Régionalisation, gouvernance et régulations internationales

Commentaires
On présentera l'évolution des échanges des biens et services, des mouvements de facteurs de production (hommes et capitaux) et des politiques commerciales depuis le XIX^{e} siècle. On mettra en évidence les spécificités des phénomènes contemporains, notamment le rôle des institutions internationales et le poids croissant des firmes multinationales dont il conviendra d'étudier les stratégies.
On mobilisera et on confrontera données factuelles et théories économiques pour traiter les questions de l'explication du contenu des échanges, des déterminants de la spécialisation, du choix entre libre-échange et protectionnisme. On analysera les différences de performances commerciales entre nations (on s'interrogera notamment sur la pertinence de la notion de compétitivité appliquée à une nation), et les effets de la mondialisation en termes d'emploi et de répartition.
L'étude de la libéralisation multilatérale des échanges et celle des principales expériences d'intégration régionale nourrira un questionnement sur leur compatibilité. On réfléchira aux modalités de la gouvernance et de la régulation de la mondialisation.

3.2/ La dynamique de la mondialisation financière

Objectifs
On montrera que la mondialisation se manifeste aussi par l'émergence d'un marché mondial des capitaux dont on analysera le fonctionnement. On étudiera la façon dont flux réels et flux financiers influencent la formation des cours de change dans le cadre d'un système monétaire international dont on retracera les transformations depuis le XIX^{e} siècle.

3.2.1. Balance des paiements, cours de change et systèmes de change
3.2.2. L'évolution du système monétaire international depuis le XIX^{e} siècle
3.2.3. Constitution et fonctionnement du marché international des capitaux

Commentaires
On étudiera la construction de la balance des paiements et on interprétera les différents soldes. En confrontant théories économiques et données factuelles, on s'interrogera sur les déterminants, réels et financiers, de la formation des cours de change. On analysera également les politiques de change et leur influence, et on discutera les forces et faiblesses respectives des différents systèmes de change.
On analysera les fonctions d'un système monétaire international, puis on présentera les différents systèmes qui se sont succédé depuis le XIX^{e} siècle en étudiant les débats dont ils ont été l'objet.
On étudiera l'évolution des mouvements de capitaux depuis le XIX^{e} siècle, et on s'interrogera sur leur développement contemporain et ses effets sur l'allocation du capital à l'échelle mondiale.
On analysera le processus de globalisation financière. Dans cette optique on présentera brièvement les principaux segments du marché international des capitaux (marchés des taux d'intérêt, des changes, des actions et des matières premières), les différentes catégories d'opérateurs et les principaux instruments cotés, On mettra en évidence les interconnexions entre les différents segments et acteurs du marché.

3.3/ L'intégration européenne

Objectifs

On présentera et analysera l'exemple le plus abouti d'intégration régionale : l'Union européenne. On montrera que ce projet européen s'est construit progressivement, au fil des traités, des conflits et des accords, pour arriver à l'union économique et monétaire, symbolisée par l'adoption de la monnaie unique. On s'interrogera sur la possibilité de créer une Europe sociale.

3.3.1. La dynamique de la construction européenne
3.3.2. L'Europe économique et monétaire
3.3.3. L'Europe sociale

Commentaires

On partira du questionnement, mené à partir des années 1950, autour du projet européen. On étudiera les réalisations de l'Europe, tant dans le domaine économique que dans le domaine monétaire. On étudiera les progrès de l'intégration économique et les problèmes auxquels l'Union est aujourd'hui confrontée notamment du fait de son hétérogénéité et des évolutions de son périmètre géographique. On traitera les problèmes et les débats liés à l'adoption et à l'existence d'une monnaie unique. On abordera la question de la gouvernance de l'Union, principalement à travers les questions budgétaires et monétaires. Les questions purement institutionnelles, si elles peuvent être abordées, ne relèvent pas directement de ce programme.
On abordera la question de l'Europe sociale à travers les instruments de coordination et d'harmonisation déjà mis en place en matière d'emploi et de politiques sociales. On s'interrogera sur la nature du modèle social européen.

Module 4 : Déséquilibres, régulation et action publique

Orientation générale

Ce module est centré sur les déséquilibres économiques, sur leurs conséquences économiques et sociales, et sur l'intervention des pouvoirs publics. On étudiera les déséquilibres que constituent l'inflation et le chômage et on présentera la manière dont les grands modèles macroéconomiques conçoivent la notion d'équilibre. On étudiera l'intervention publique en matière économique et les contraintes auxquelles elle se heurte. La troisième partie sera consacrée à l'étude des politiques sociales.

4.1/ Équilibres et déséquilibres macroéconomiques

Objectifs

On étudiera les grands déséquilibres macroéconomiques que sont l'inflation et le chômage. On s'interrogera sur la construction des indicateurs et sur les analyses théoriques permettant d'expliquer ces déséquilibres. Cette approche sera complétée par une étude des grands modèles d'équilibre macroéconomiques.

4.1.1. L'inflation et le chômage
4.1.2. L'équilibre macroéconomique à travers les modèles : IS-LM / IS-LM-BP / OGDG

Commentaires

On retracera les principales tendances de l'évolution des prix depuis le XIX^{e} siècle, et on mobilisera les théories économiques sur l'inflation et la déflation, tant pour proposer des explications de ces phénomènes, que pour en évaluer les conséquences.
On montrera que la nature et l'intensité du chômage ont beaucoup varié dans le temps et dans l'espace. On abordera les différentes approches théoriques. On exposera les explications issues de l'arbitrage inflation / chômage : interprétations keynésiennes, puis interprétations classiques qui seront l'occasion de présenter les anticipations adaptatives, puis les anticipations rationnelles. On présentera enfin les analyses les plus récentes sur le chômage et l'emploi.
On présentera les principes de construction des courbes IS et LM en économie fermée, en montrant comment les déplacements des courbes rendent compte des politiques conjoncturelles. On introduira à cette occasion la notion de multiplicateur. On construira le modèle IS-LM-BP.
On présentera les principes de construction des courbes d'offre globale et de demande globale, le rôle joué par les anticipations et la rigidité des prix et des salaires dans la forme des courbes.

4.2/ L'intervention économique des pouvoirs publics

Objectifs

En mobilisant des exemples historiques et contemporains, on étudiera l'intérêt et les limites de l'intervention économique des pouvoirs publics. On analysera ensuite les politiques économiques conjoncturelles et structurelles, leurs effets et les contraintes auxquelles elles sont soumises.

4.2.1. Fluctuations économiques et politiques de régulation des cycles
4.2.2. Politiques structurelles et interventions de l'État face aux défaillances de marché
4.2.3. Les contraintes auxquelles se heurtent les politiques économiques

Commentaires

On montrera que la croissance économique a été marquée depuis le XIX^{e} siècle par des fluctuations économiques et des crises auxquelles les pouvoirs publics ont dû répondre. On mettra l'accent sur les politiques de régulation menées depuis le début des années 1930. On analysera les politiques fiscales, budgétaires et monétaires, qui visent à prévenir les crises et à lutter contre les récessions. On soulignera l'importance des crises financières et la diversité de leurs origines et manifestations et on présentera les différentes solutions proposées par les pouvoirs publics pour limiter le risque d'occurrence de nouvelles crises.
On étudiera les politiques qui visent à accroitre la croissance potentielle des économies et leur compétitivité, à limiter les imperfections de la concurrence, mais aussi à corriger les externalités négatives et préserver la soutenabilité de cette croissance.
On montrera que ces politiques, qui ne s'exercent plus seulement dans un cadre national mais recouvrent également des actions coordonnées notamment au niveau européen, sont soumises à des contraintes et sont l'objet de controverses. On s'interrogera en particulier sur la soutenabilité de la dette publique, et sur la contrainte extérieure.

4.3/ Les politiques sociales

Objectifs

On étudiera les fondements de la légitimité de l'intervention sociale des pouvoirs publics. On montrera que les débats depuis le XIX^{e} siècle influencent les politiques de lutte contre les inégalités et produisent des modèles différents d'État-providence et de protection sociale.

4.3.1. Justice sociale et légitimation de l'intervention publique
4.3.2. Les politiques de lutte contre les inégalités
4.3.3. Etat-providence et protection sociale

Commentaires

On mettra en évidence les différentes voies qu'ont pu emprunter les pays industrialisés pour faire émerger les grands systèmes d'État social et les difficultés auxquelles ils sont confrontés aujourd'hui.
On étudiera les principaux débats en matière de conception de la justice sociale et d'intervention des pouvoirs publics dans ce domaine. On analysera notamment l'influence des conceptions de la justice sociale sur le traitement des inégalités et de l'exclusion ainsi qu'en matière de lutte contre la pauvreté. On montrera comment ont évolué dans le temps les termes du débat entre performances économiques d'une part et protection et justice sociales d'autre part.
On étudiera les grands types de politique de lutte contre les inégalités, leurs effets et les contraintes qui pèsent sur elles.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe IV
Programmes d'histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain
1ère et 2nde années

Programme d'histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain (HGGMC)

CPGE économique et commerciale

Les orientations générales du programme

Le programme d'histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain (HGGMC) de la filière économique et commerciale, voie générale, s'inscrit dans la continuité de celui de 2013 en tenant compte de la rénovation des programmes d'histoire-géographie de l'enseignement secondaire, de l'introduction d'un enseignement de spécialité du cycle terminal des lycées en histoire, géographie, géopolitique et sciences politiques, ainsi que du renouvellement des approches méthodologiques et conceptuelles intervenues depuis.

Le programme est structuré en quatre modules semestriels, dont le premier a pour objectif de marquer la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. Chaque module est accompagné d'un commentaire qui précise les finalités de l'enseignement, l'esprit du programme et le cadre dans lequel il peut être traité.

L'ensemble du programme favorise l'adaptation des étudiants aux méthodes de l'enseignement supérieur. Il s'inscrit dans les modalités de parcours des études supérieures de l'espace européen, telles qu'elles sont définies par les textes en vigueur. Il prend également en compte les objectifs de formation des écoles de management, notamment en favorisant une réflexion d'ensemble sur le monde contemporain. *In fine*, ce programme vise à favoriser la maîtrise de compétences décisives pour de futurs entrepreneurs destinés à travailler dans un monde complexe : ouverture culturelle et recul critique, analyse interdisciplinaire et capacité à la synthèse.

Le programme propose d'articuler les approches historique, géographique, géoéconomique et géopolitique

Le programme d'histoire-géographie-géopolitique du monde contemporain est placé sous le signe de l'hybridation des savoirs, sans pour autant confondre leurs démarches respectives. Interdisciplinaire dans son esprit, il doit permettre aux étudiants d'approcher la complexité du monde contemporain.

La démarche géopolitique constitue le fil directeur du programme. Conçue comme un champ disciplinaire, elle permet de combiner les dimensions historiques, géographiques et géoéconomiques pour étudier les rivalités de pouvoirs et d'influences qui s'exercent sur les territoires à toutes les échelles et qui structurent le monde contemporain. Elle insiste sur les jeux d'acteurs, leurs systèmes de représentation et leurs stratégies.

Dans cette optique, l'enseignement de l'histoire permet une mise en perspective des analyses sur le temps long du XX^{e} siècle. Il ne se réduit donc pas à une simple étude chronologique des faits économiques et sociaux mais s'inscrit dans un cadre plus large, à l'écart de toute modélisation abusive. Il prend notamment en compte les aspects politiques, économiques et culturels, scientifiques et techniques.

Les orientations de l'enseignement de la géographie inscrivent la géopolitique dans ses dimensions spatiales et territoriales. La préférence accordée en seconde année à la dynamique géographique, géoéconomique et géopolitique des aires régionales et des continents favorise une vision des lignes de force de l'évolution du monde actuel. Elle impose une démarche à plusieurs échelles, qui permet notamment d'appréhender les dimensions du jeu des réseaux dans le monde contemporain.

L'organisation du programme et de l'évaluation

La dimension synthétique du programme permet de consacrer le temps de la classe à l'acquisition et à la maîtrise de connaissances, de concepts, de méthodes et d'outils qui fondent une réflexion critique sur la complexité du monde contemporain. Le travail prend tout son sens quand le cours est centré sur un chapitre court, ouvert par une introduction problématisée et clos par une conclusion de mise en perspective. Cette démarche accroît la capacité d'argumentation et de synthèse des étudiants, qualités si importantes dans les métiers auxquels ils se préparent. Le travail personnel devient ainsi davantage l'occasion d'un élargissement par l'indispensable lecture de médias ou d'ouvrages qui complètent le cours du professeur et permettent la construction d'une culture générale la plus large possible.

La prise en compte des orientations historiques, géographiques, géoéconomiques et géopolitiques renouvelées conduit le professeur à une réflexion épistémologique indispensable à l'étude des questions abordées. Le programme constitue ainsi un outil de réflexion opératoire et contribue à développer les compétences d'analyse approfondie des situations.

Les quatre modules du programme constituent un ensemble étudié en deux années de préparation aux concours dont les conditions sont fixées dans les règlements pédagogiques des écoles de management. Les modules sont des acquis capitalisables en université.

A travers le programme et les méthodes étudiés, l'HGGMC contribue à la maîtrise de plusieurs compétences essentielles en école de management et dans le monde professionnel :

- combiner les apports de plusieurs champs disciplinaires pour comprendre, nuancer et synthétiser la complexité d'une situation ;
- être un acteur critique du monde contemporain ;
- être capable de raisonner à des échelles d'espace et de temps différentes :
- savoir poser une problématique et y répondre par une démonstration appropriée ;
- s'initier à la prospective et à ses limites ;
- comprendre les points de vue et les enjeux d'acteurs différents ;
- pouvoir s'exprimer de manière efficace et rigoureuse à l'écrit et à l'oral.

PROGRAMME DE PREMIERE ANNEE

Les deux premiers modules dressent un panorama du XX^e^ siècle et du début du XXI^e^ siècle sous l'angle géopolitique et économique. Ils fixent les principaux repères historiques nécessaires à la compréhension du monde contemporain. Ils sont centrés sur l'analyse d'un monde en mutations, de la veille de la Première Guerre mondiale à la mondialisation contemporaine. Une place toute particulière est accordée à l'étude de la France.

Module I.

Les grandes mutations du Monde de 1913 à nos jours

I.1. Panorama géopolitique du monde de 1913 à la fin de la guerre froide
I.1.1. Géopolitique et relations internationales : une introduction
I.1.2. Tableaux géopolitiques du monde en 1913, 1939 et en 1945
I.1.3. Géopolitique de la guerre froide, de la décolonisation et des conflits jusqu'aux années 1990

I.2.Le monde depuis les années 1990 : entre ruptures et recompositions géopolitiques
1.2.1. Tableau géopolitique du monde à la fin de la guerre froide
1.2.2. Le monde actuel : ordre et désordre, émergences et rééquilibrages, espaces de paix et espaces de guerres
1.2.3. La gouvernance mondiale : crises et redéfinitions

I.3. L'économie mondiale d'un siècle à l'autre
I.3.1. La croissance et le développement : une introduction
I.3.2. Économie, croissance et sociétés dans les pays occidentaux de 1913 à 1945
I.3.3. Les modèles de croissance de 1945 à nos jours

Commentaire

Le premier module propose un ensemble de perspectives permettant de saisir les grandes mutations survenues depuis les débuts du XX^{e} siècle. Il est aussi l'occasion d'acquérir progressivement, en ce premier semestre, les méthodes de travail requises par nos disciplines dans l'enseignement supérieur.

Le premier volet vise à donner un panorama géopolitique non exhaustif du monde de la veille de la Première Guerre mondiale à la fin de la guerre froide. Il débute par une *introduction à la géopolitique et aux relations internationales*, destinée à doter les étudiants d'un cadre conceptuel et épistémologique leur permettant de mieux approcher l'ensemble du programme. Il propose ensuite trois tableaux géopolitiques du monde : *le monde en 1913* souligne le rôle d'une Europe divisée et inégalement industrialisée dans le contexte d'une phase nouvelle de la mondialisation et des « impérialismes ». *Le monde en 1939* présente un monde instable, fracturé, fragilisé par la crise des années 1930 et l'arrivée au pouvoir de régimes autoritaires et totalitaires. Après une présentation du *monde en 1945*, l'étude géopolitique de la guerre froide, de la décolonisation et des conflits jusqu'aux années 1990 s'effectue dans une optique de synthèse et non d'énumération factuelle.

Le deuxième volet est centré sur l'analyse des ruptures et recompositions géopolitiques mondiales depuis le début des années 1990. Il débute par un tableau géopolitique du monde à la fin de la guerre froide abordant le basculement d'un ordre bipolaire à un ordre géopolitique dominé par les États-Unis, puissance par ailleurs économiquement dominante de la triade dans les années 1990. Cette partie analyse comment l'épuisement relatif de cet ordre mondial a débouché sur un monde aux désordres multiples, aux conflits nouveaux, avec un reclassement des puissances au sein d'un cadre désormais plus éclaté que multipolaire, où certains accords bilatéraux et internationaux, notamment de désarmement, sont remis en cause. Enfin, il considère la question de l'adaptation de la gouvernance mondiale aux enjeux de notre temps.

Le troisième volet est consacré à l'évolution économique mondiale depuis le début du XX^{e} siècle ; il débute par une introduction à l'étude des rapports entre croissance et développement. Une deuxième partie présente les évolutions économiques et sociales dans les pays occidentaux de 1913 à 1945, entre croissance et crise, mondialisation et replis protectionnistes et deux conflits mondiaux. Enfin, les grandes mutations économiques mondiales depuis 1945 sont analysées au prisme des grands modèles de croissance – notamment libérale et communiste. Une place particulière doit être réservée au décollage inégal des économies émergentes depuis la fin du XX^{e} siècle.

Dans l'ensemble de ce module, on prend appui sur des exemples variés dans l'espace sans négliger le cas de la France dont une étude plus particulière est prévue dans le deuxième module.

Module II.

La mondialisation contemporaine : rapports de force et enjeux

II.1. La mondialisation : acteurs, dynamiques et espaces
II.1.1. La mondialisation : une introduction
II.1.2. Les acteurs et leurs stratégies
II.1.3. Nouvelles frontières, nouveaux territoires et limites de la mondialisation

II.2. Les défis du développement et les enjeux d'un monde durable
II.2.1. Les défis géopolitiques et géoéconomiques du développement durable
II.2.2. Les ressources, un enjeu stratégique
II.2.3. Les défis géopolitiques et géoéconomiques du changement climatique

II.3. La France, une puissance en mutations depuis les années 1990
II.3.1. La France : un modèle entre héritages, crises et transformations face à la mondialisation
II.3.2. La France : une puissance européenne
II.3.3. La France : une puissance mondiale et maritime

Commentaire

Le deuxième module fournit les principales clés de compréhension du monde sous un angle géoéconomique et géopolitique.

La première partie débute par une introduction à la mondialisation contemporaine devant permettre d'abord l'étude de ses caractéristiques principales : l'essor des flux commerciaux, financiers, humains, d'informations ; ses principaux vecteurs – notamment la baisse des obstacles tarifaires et du coût des transports ; le rôle décisif de la « maritimisation » du monde dans cette phase de mondialisation. Cet ensemble aboutit à un monde certes en réseau mais aussi parcouru de fractures. Une analyse des acteurs – étatiques comme non-étatiques – et de leurs stratégies sur les différents échiquiers de la mondialisation mettra notamment l'accent sur la guerre et la paix économiques pour les États, les concurrences et les partenariats pour les entreprises, les réseaux qui parcourent les sociétés et diffusent l'information. Le rôle des organisations multilatérales mais aussi des opinions publiques sera souligné. Cette partie s'achèvera sur une étude de la dimension géographique de la mondialisation autour des nouvelles frontières et des nouveaux territoires : mers et océans, espace et cyberespace, mutation du rôle des frontières…

La mondialisation est un processus complexe d'interconnexion des différentes parties du monde qui présente aujourd'hui des limites. Elle a fait prendre conscience d'un certain nombre d'enjeux globaux qui ont des impacts majeurs. A ce titre, et dans cette perspective, trois d'entre eux seront étudiés. Les *défis du développement durable* sont analysés sous le double angle géopolitique et géoéconomique.

Après cette analyse d'ensemble, deux points sont l'objet d'une attention particulière : les *ressources* (leur finitude, les stratégies d'appropriation et d'adaptation pour les acteurs concernés) et le *changement climatique*, dont les différentes dimensions seront abordées.

Pour conclure ce module, une place particulière est accordée à la France contemporaine, de manière à étudier sa situation dans un monde « mondialisé ». Il s'agira d'envisager les mutations du pays et son adaptation au contexte de la mondialisation, en prenant soin de montrer tant les faiblesses que les réussites, à travers l'étude des *crises et des transformations*. Cela permettra d'analyser, ensuite, les caractères, les atouts et les faiblesses de la France comme *puissance européenne* et comme puissance mondiale, en insistant sur ses singularités, notamment son espace maritime.

PROGRAMME DE SECONDE ANNEE

Les modules III et IV privilégient une approche synthétique de la géopolitique des aires régionales et des continents. Les pays cités sont abordés en fonction des déterminants et déclinaisons de leur puissance ainsi que dans leur rapport à leur environnement régional et au reste du monde. Ils ne font pas l'objet d'une étude exhaustive.

MODULE III

Géodynamique de l'Union européenne, de l'Afrique, du Proche et du Moyen-Orient

III.1. L'Union européenne, l'Europe et le monde
III.1.1. L'Union européenne et ses territoires : intégrations et fragmentations
III.1.2. L'Union européenne et son voisinage proche : la Russie et l'espace méditerranéen
III.1.3. L'Union européenne dans le monde

III.2. Le continent africain, le Proche et le Moyen-Orient
III.2.1. États et territoires, cultures et sociétés
III.2.2. Le développement : politiques et enjeux
III.2.3. Géopolitique du continent africain, du Proche et du Moyen-Orient

Commentaire

Le troisième module donne des clefs de compréhension et d'analyse des spécificités et de la complexité des situations qui prévalent aujourd'hui en Europe, sur le continent africain et au Proche et Moyen-Orient. Dans ce but, l'histoire, la géographie, la géoéconomie et la géopolitique sont associées pour offrir une lecture synthétique qui rende compte de manière à la fois précise, nuancée et critique d'une réalité mouvante.

Il s'agit tout d'abord de montrer que l'Union européenne consiste en une tentative toujours renouvelée d'intégrations multiples visant à dépasser les fragmentations héritées et contemporaines, au risque d'en susciter de nouvelles. C'est l'occasion d'expliquer que les élargissements successifs ont pu contribuer à questionner les modalités et la poursuite de l'approfondissement. Ainsi, dans une Union européenne à géométrie de plus en plus variable, assurer l'unité dans la diversité devient un défi de plus en plus complexe. La question de l'identité et de la cohésion de l'Union européenne est alors posée. Le débat entre les visions d'une « Europe marché » et d'une « Europe puissance » est exposé. Cela conduit à étudier la place et le rôle de l'Union européenne au sein du reste de l'Europe, dont *la Russie, de l'ensemble des pays du sud et de l'est de la Méditerranée* ainsi que du *reste du monde*.

Les dynamiques africaines, moyennes et proche-orientales demandent une réflexion sur les effets de la colonisation et de la décolonisation dans la structuration des États, des nations et des territoires. Il est tenu compte de la diversité et de l'ancienneté des cultures. L'importance du défi du développement est posée. Si les stratégies de *développement* mettent en jeu des acteurs locaux et régionaux, le continent africain, le Proche et le Moyen-Orient subissent encore les contraintes de la dépendance et parfois des ingérences. La faiblesse des intégrations régionales et les multiples fragmentations qui déstabilisent les territoires gênent l'affirmation de cette région dans le monde sont démontrées.

MODULE IV

Géodynamique continentale des Amériques et de l'Asie

IV.1. Les Amériques
IV.1.1. Géopolitique des Amériques
IV.1.2. Les États-Unis : société, politique et puissance à l'époque contemporaine
IV.1.3. L'Amérique latine : émergences et crises

IV.2. L'Asie
IV.2.1. Géopolitique d'une région multipolaire
IV.2.2. Les espaces asiatiques dans la mondialisation
IV.2.3. Deux géants asiatiques : la Chine, puissance mondiale, l'Inde, puissance émergente

Commentaire

L'étude des Amériques débute par une *géopolitique régionale* qui permet de mettre en évidence les relations entre l'Amérique anglo-saxonne et l'Amérique latine à l'époque contemporaine. L'attention est attirée sur le fait que le grand nombre des initiatives d'intégrations régionales révèle le jeu des ambitions de plusieurs États, dont le Brésil, sur un continent marqué par des fragmentations culturelles, politiques et de développement. *Les États-Unis*, du fait de profondes transformations intérieures et de leur exercice de la puissance, font l'objet d'une analyse spécifique. En *Amérique latine*, on explique combien les stratégies successives de développement mises en œuvre ont abouti à des processus d'émergence souvent éphémères, incomplets et émaillés de crises.

L'étude de l'Asie, région multipolaire, débute par sa géopolitique interne et externe. Cela suppose une présentation des États, des sociétés ainsi que de la diversité politique et culturelle dans le cadre d'une mise en perspective et des relations de pouvoir sur le temps long, de manière à mettre en évidence la dimension géopolitique et l'articulation entre les États.

L'importance et le rôle de certains pays non cités, dont le Japon, sont soulignés. La place montante de *l'Asie dans la maritimisation et la mondialisation*, l'importance de ses métropoles, de ses façades et de ses enjeux maritimes sont mises en valeur. La puissance géoéconomique et géopolitique des *deux géants asiatiques* fait l'objet d'une analyse particulière. L'accent est mis sur la Chine comme puissance mondiale, en soulignant les liens étroits entre la société et la politique chinoises au regard de ses ambitions mondiales. Quant à l'Inde, elle est étudiée comme puissance émergente et possible géant de demain.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe V
Programme de lettres et philosophie
1ère et 2nde années

CPGE économiques et commerciales
Programme « Lettres et Philosophie »

Objectifs de formation

Commun à l'ensemble des classes préparatoires économiques et commerciales, cet enseignement, qui implique à part égale les Lettres et la Philosophie, est partie constituante de la formation générale des étudiants.
Sa finalité est de former les élèves à une réflexion autonome et éclairée, par la lecture ample et directe d'œuvres de littérature et de philosophie, par l'étude des arts et des techniques, et par la pratique régulière de travaux écrits et oraux. Les étudiants développent ainsi leurs capacités à s'interroger, à conduire une pensée cohérente et à tirer profit avec finesse et pertinence de leurs connaissances.

L'enseignement « Lettres et Philosophie » a trois objectifs majeurs :

1. il permet aux élèves d'enrichir leur culture et de mieux comprendre le monde dans lequel ils vivent ;
2. il les entraîne à développer leur réflexion personnelle, ainsi qu'à aiguiser leur sens critique ;
3. il vise à développer la maîtrise de l'expression écrite et orale ainsi que l'aptitude à communiquer, compétences indispensables pour la future vie professionnelle des étudiants.

Les exercices écrits sont pris en charge collégialement par les deux professeurs de Lettres et de Philosophie.

Programme

Chaque professeur détermine librement et en pleine responsabilité, selon les parcours intellectuels et les choix pédagogiques qui répondent aux besoins des élèves, les œuvres philosophiques, littéraires ou relevant de l'ensemble des arts, dont il juge l'étude nécessaire à son enseignement. Les deux professeurs, de Lettres et de Philosophie, s'accordent pour assurer la cohérence d'ensemble de l'enseignement dispensé.

Première année

Le programme permet d'élargir et d'enrichir les connaissances acquises au cours des études secondaires, et de consolider la culture nécessaire à une réflexion personnelle. Il s'inscrit dans la continuité des enseignements de tronc commun, Lettres ou Philosophie, mais également d'un enseignement de spécialité comme « Humanités, Littérature et Philosophie ».
L'enseignement tient compte des relations qui unissent les notions ou les concepts à leur histoire, aux contextes et résonances à travers lesquels se sont précisés leur usage et leur

sens. On rapporte ainsi l'étude des œuvres littéraires, artistiques ou philosophiques aux représentations mythologiques, religieuses, esthétiques, ainsi qu'à l'histoire des sciences, des arts et des techniques.

Ce programme est constitué des rubriques suivantes :

- l'héritage de la pensée grecque et latine ;
- les apports du judaïsme, du christianisme et de l'islam à la pensée occidentale ;
- les étapes de la constitution des sciences exactes et des sciences de l'homme ;
- l'essor technologique, l'idée de progrès ;
- la société, le droit et l'Etat modernes ;
- les figures du moi et la question du sujet depuis la Renaissance ;
- l'esprit des Lumières et leur destin ;
- quelques grands courants artistiques et esthétiques depuis la Renaissance ;
- les principaux courants de pensée contemporains.

Les rubriques sont abordées selon un parcours que les professeurs de Lettres et de Philosophie déterminent ensemble, en fonction de regroupements et de problématiques dont ils ont l'initiative et la responsabilité.

Seconde année

Etude d'un thème renouvelé chaque année par arrêté conjoint du ministre chargé de l'éducation et du ministre chargé de l'enseignement supérieur.

Pour le concours 2025, le thème est "L'image" (Arrêté du 28-06-2024) sur Bulletin Officiel du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche - BO du 18-07-2024).

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe VI
Programmes de langues vivantes étrangères
1ère et 2nde années

Objectifs de formation

L'enseignement des langues vivantes en classes préparatoires économiques et commerciales constitue un volet essentiel de la formation générale. La raison en est claire : les carrières auxquelles se destinent les étudiants des écoles de management ont une dimension internationale et interculturelle.

Dans cette perspective, l'enseignement obligatoire de deux langues vivantes est proposé aux étudiants afin qu'ils acquièrent les compétences linguistiques et les connaissances culturelles nécessaires à leur insertion professionnelle et à leur ouverture au monde.

Les niveaux de compétences ciblés en fin de 2de année sont C1 pour la LVA, notamment dans les compétences de réception, et B2-C1 pour la LVB.

L'étude des langues vivantes, dans toutes les classes préparatoires économiques et commerciales, a comme objectifs :

- de consolider et d'approfondir les compétences de l'enseignement du second degré, dans le prolongement des enseignements du cycle terminal (en tronc commun et, le cas échéant, en enseignement de spécialité LLCER), sur le plan linguistique et culturel ;
- de faire travailler la langue en contexte sur la base de supports variés ;
- de faire acquérir aux étudiants un niveau plus élevé de compréhension et d'expression, tant à l'écrit qu'à l'oral ; le développement des compétences orales et oratoires en langue étrangère – prise de parole en continu et en interaction – fait l'objet d'une attention particulière et d'un entraînement régulier ;
- d'assurer la mise en place des repères culturels indispensables à la connaissance de la civilisation et de la culture des pays concernés, de façon à éclairer les réalités économiques, sociales et politiques du monde contemporain ; on proposera, le cas échéant, des thématiques croisées avec d'autres disciplines ;
- d'apprendre à utiliser des ouvrages et des outils de référence, d'approfondir les compétences acquises précédemment pour rechercher, sélectionner et exploiter des documents. Les ressources et outils numériques sont utilisés avec profit ;
- d'entraîner à la traduction de textes variés, à la compréhension fine de documents, et à différents types de production écrite.

Organisation des enseignements

Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures. Il aura une fonction bien particulière, dont l'objectif essentiel est la prise en charge individualisée et l'homogénéisation du niveau des étudiants, en tenant compte, pour le compenser le cas échéant, de leur historique de formation dans chacune des deux langues étudiées.

Pour cela, les premiers mois devront être axés sur :

- un travail de la langue et sur la langue en contexte ;
- l'accès progressif à une compréhension fine, à l'écrit comme à l'oral ;
- l'acquisition d'une expression maîtrisée et adéquate ;
- l'acquisition d'une méthode adaptée aux différents savoir-faire visés.

Dans le cadre de la liberté pédagogique, le professeur choisit ses méthodes et sa progression. Il organise son enseignement en suivant deux principes directeurs :

a) le professeur choisit le contexte, les problématiques et les méthodes qui favorisent les apprentissages et diversifie les modes d'acquisition des savoirs et des compétences. Il explicite pour les élèves les objectifs poursuivis, les méthodes utilisées et les critères d'évaluation ;

b) le professeur privilégie la mise en activité des étudiants : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Ils sont amenés à manipuler la langue, les notions et les concepts en exerçant leur esprit critique. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 1
Programmes de mathématiques - informatique

1ère et 2nde années

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Programmes de mathématiques - informatique

1ère année

Table des matières

Introduction

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, notamment dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise à développer en particulier chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser les concepts et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC voie technologique est celui de l'enseignement obligatoire de la classe de terminale sciences et technologies du management et de la gestion. Le programme

se situe dans le prolongement de ceux des classes de première et terminale de la filière STMG.
Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du lycée, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants en classes de première et de terminale.

Le programme s'organise autour de quatre points qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- Une approche de l'algèbre linéaire est présentée en première année par le biais des systèmes d'équations linéaires et l'introduction du calcul matriciel, qui sera poursuivi en seconde année.

- L'analyse en 1ère année, vise à mettre en place l'ensemble des outils usuels autour des suites et des fonctions. L'aspect opératoire et l'interprétation graphique sont privilégiés. Aucune difficulté théorique n'est soulevée.

- Les probabilités et les statistiques s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en classe de terminale. Le cadre principal est celui des univers finis pour lesquels le langage abstrait des probabilités est mis en place.

- L'analyse de données sous forme descriptive ou l'utilisation d'une base de données relationnelles permettent d'aborder différents aspects de la manipulation de données volumineuses.
- L'utilisation d'un langage de programmation et de certaines de ses fonctionnalités est enseignée tout au long de l'année au service du programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités, par exemple, permettent d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales...) et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté ; en revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur y conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités, ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée. Les démonstrations ne sont pas exigibles.

La pratique des automatismes installée au lycée dans l'objectif d'acquérir des connaissances, des méthodes et des stratégies immédiatement mobilisables peut être poursuivie sous différentes formes, en accord avec le contenu du cours.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées. Dans certaines situations, en continuité avec les programmes de lycée, l'utilisation d'un tableur peut s'avérer adaptée.

Les étudiants ont déjà une pratique algorithmique acquise au lycée. Dans leurs études futures, ils seront amenés à utiliser différents logiciels conçus pour la résolution de problématiques liées à certains contextes. Une pratique régulière d'outils informatiques les prépare utilement en ce sens. Par ailleurs, l'utilisation d'un outil informatique (programme informatique ou tableur) permet l'observation de résultats mathématiques en situation, l'exploration et la modélisation de situations non triviales plus réalistes et offre la possibilité d'expérimenter et de conjecturer.

Enseignement de mathématiques du premier semestre

Le premier semestre doit permettre la consolidation des notions étudiées jusqu'en terminale tout en les approfondissant.

I - Outils mathématiques

Ce chapitre présente quelques points de vocabulaire, quelques notations, ainsi que des modes de raisonnements indispensables pour avoir la capacité d'argumenter rigoureusement sur un plan mathématique. Ces outils ne doivent pas faire l'objet d'un exposé théorique, les notions seront introduites progressivement au cours du semestre en utilisant celles déjà acquises au lycée et à l'aide d'exemples nombreux et variés issus des différents chapitres étudiés, et pourront être renforcées au delà, en fonction de leur utilité.

1 - Raisonnement

On confrontera les étudiants à divers modes de raisonnements (démontrer une implication, une équivalence, raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence) à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés.

Les étudiants doivent savoir :

• utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;

• utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

Notations : $\exists$, $\forall$.
Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.

• distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;

• utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;

• formuler la négation d'une proposition ;

• utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;

• reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde ;

• raisonnement par récurrence (récurrence simple).

On commence par le mettre en œuvre sur des exemples élémentaires. Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

2 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications. On s'appuiera sur des représentations graphiques.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance.
Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Ensemble vide. Réunion. Intersection. Ensembles disjoints. Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.
Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.
Lois de Morgan.

On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »).
Le complémentaire d'une partie A de E est noté $\bar{A}$.

Produit cartésien.

On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

Cardinal d'un ensemble fini.
Si A et B sont disjoints :
$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
Formule de Poincaré pour deux ensembles.
$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$.

La notion de cardinal est introduite pour son application au calcul des probabilités (uniquement dans le cas de l'équiprobabilité). Tout exercice de dénombrement pur est exclu.

b) Applications

Définition.
Image, antécédent.
Composition.
Bijection, application réciproque.

Ces notions seront introduites sur des exemples simples.
La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.

3 - Calculs numériques et algébriques

Il s'agit de rappeler les notations $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ *et* $\mathbf{R}$, *les propriétés des opérations arithmétiques, les règles de calcul, le traitement des égalités et des inégalités.*

Puissances entières de 10.
Puissances entières d'un réel.

On attend en particulier la maîtrise des formules $(xy)^n = x^n y^n$, $x^{n+m} = x^n x^m$...

Développement, factorisation d'expressions algébriques.

On manipulera également des quotients.

Racine carrée d'un réel positif. Propriétés.

Identités remarquables.

Les attendus se limitent aux formules suivantes :
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Manipulation des inégalités.

Notion d'intervalle.
Intervalle ouvert, fermé, semi-ouvert.

Résolution d'équations et d'inéquations simples.
Résolution de systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Il s'agit d'une reprise des types d'équations et d'inéquations abordées dans les classes antérieures et pratiquées en gestion.

4 - Polynômes à coefficients réels

Toute étude théorique sur les polynômes est exclue. On identifie polynôme et fonction polynomiale.

Racines et signe d'un polynôme du premier et du second degré. Discriminant.	Somme et produit des racines Illustration graphique. $\boxed{\blacktriangleright}$ Factorisation d'un trinôme du second degré de discriminant positif ou nul.
Polynômes de degré quelconque. Somme, produit de polynômes.	
Factorisation d'un polynôme par $(x-a)$ si a est racine de ce polynôme.	Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. $\boxed{\blacktriangleright}$
Application à l'étude d'équations et d'inéquations.	Illustration graphique.

5 - Fonction valeur absolue

Définition, notation, propriétés, représentation graphique.	Lien avec la distance dans $\mathbf{R}$.

II - Suites réelles

On présentera des exemples de suites issus du monde économique (capital et taux d'intérêt, emprunt à annuités constantes).
Les notions de comportement et de limite ne seront abordées qu'au second semestre.
Ce chapitre fournira l'occasion d'illustrer le raisonnement par récurrence et donnera l'occasion de consolider les connaissances du lycée de programmation en Python.

Suites constantes, suites arithmétiques, suites géométriques.	Calcul du n-ième terme. $\boxed{\blacktriangleright}$ Savoir montrer qu'une suite est constante, arithmétique ou géométrique.
Suites arithmetico-géométriques	Calcul du n-ième terme. $\boxed{\blacktriangleright}$ Une formule explicite pourra être donnée, mais on introduira la méthode sur des exemples.
Terme général d'une suite.	Sur des exemples, application à la recherche du terme général d'autres suites à l'aide des suites usuelles. Aucune étude générale de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est au programme.
Somme des n premiers nombres entiers naturels et somme des n premiers termes de la suite (q^k). Notation $\sum$. Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, somme des n premiers termes d'une suite géométrique.	Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques. Transformation de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} au_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

III - Fonctions réelles d'une variable réelle

Il s'agit de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et les notions nécessaires à leur représentation graphique. Les fonctions logarithme et exponentielle

n'étant étudiées qu'au second semestre, il convient donc ici d'utiliser des fonctions qui se déduisent simplement des fonctions polynomiales, rationnelles, valeur absolue ou racine carrée.
On utilise autant que possible des représentations graphiques pour présenter et illustrer les concepts introduits.

1 - Généralités

Vocabulaire : ensemble de définition, image, antécédent, représentation graphique d'une fonction. Fonctions paires, impaires. Fonctions monotones, strictement monotones. Fonctions majorées, minorées, bornées. Somme, produit, quotient de fonctions, composée de fonctions.	Illustration avec les fonctions usuelles connues : carré, cube, inverse, racine carrée, valeur absolue.
Introduction de la notion de fonction bijective, fonction réciproque.	Lien avec l'équation $f(x) = c$.

2 - Limites

La définition formelle d'une limite est hors programme. Toute étude théorique sur les limites est exclue. Les résultats seront énoncés sans démonstration et illustrés par des représentations graphiques.

Limite d'une fonction en un point. Limite à droite, limite à gauche. Extension de la notion de limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$. Notion de limite infinie en un point, en $+\infty$ ou en $-\infty$. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une fonction composée.	▶
Limites des fonctions polynomiales et rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$.	Les limites sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou leur quotient.
Interprétation graphique des limites : droites asymptotes, asymptotes parallèles aux axes.	▶ Toute recherche systématique des branches infinies est hors-programme.

3 - Continuité

Continuité d'une fonction en un point. Continuité de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions continues. Composition de deux fonctions continues.	Une fonction f est continue en a si et seulement si $f(x)$ admet pour limite $f(a)$ quand x tend vers a. Le prolongement par continuité est hors programme.

4 - Dérivabilité

Dérivabilité d'une fonction en un point, nombre dérivé.	Interprétation graphique. ▶

Équation de la tangente en un point.	Approximation affine au voisinage d'un point. ▶
Fonction dérivée.	Notation f'.
Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée.	
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.	Résultat admis. Principe de Lagrange : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Tableau de variation.	Sur des exemples, application à l'étude d'équations et d'inéquations, à l'obtention de majorations et de minorations.
Extremum local d'une fonction dérivable.	Une fonction f, dérivable sur un intervalle ouvert I, admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.
Dérivée seconde, notation f''.	La notion de fonction de classe C^p ou C^∞ est hors programme.
Représentation graphique de fonctions.	

5 - Convexité

Les fonctions convexes sont des outils de modélisation en économie. On pourra s'appuyer sur un exemple simple (par exemple, une fonction de coût) pour en motiver la définition. Les fonctions étudiées sont au moins de classe C^2.Tous les résultats de ce paragraphe seront admis et illustrés par des représentations graphiques. L'inégalité de la convexité n'est pas un attendu. La notion de convexité sera abordée principalement pour préciser des représentations graphiques de fonctions.

Définition d'une fonction convexe.	Une fonction est convexe (respectivement concave) si la courbe est au-dessous (respectivement au-dessus) des cordes. ▶
Position d'une courbe par rapport aux tangentes dans le cas où la fonction est convexe et dérivable. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables. Si la dérivée d'une fonction convexe f de classe C^2 sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.	▶
Caractérisation d'un point d'inflexion si f est deux fois dérivable.	▶
Représentation graphique des fonctions convexes. Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Allure locale du graphe. Exemples d'étude de points d'inflexion.

IV - **Probabilités sur un univers fini**

L'objectif est de mettre en place dans le cas fini, un cadre dans lequel on puisse énoncer des résultats généraux et mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique. On fera le lien avec l'emploi des arbres pondérés préconisé durant le cycle terminal du lycée.

1 - Espaces probabilisés finis

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire.
Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles, événements contraires.

On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.

Système complet d'événements finis.

On se limitera aux systèmes complets d'événements de type $A_1, ..., A_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) où les A_i sont des parties deux à deux disjointes et de réunion égale à Ω.

b) Probabilité

Une probabilité est une application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et pour tous A et B incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux événements.

Cas de l'équiprobabilité.

c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.
Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

Notation P_A.

Formule des probabilités composées.

Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales.

Si $A_1, ..., A_n$ est un système complet, alors pour tout événement B on a :
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

Formule de Bayes.

d) Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Indépendance mutuelle de n événements.
Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

2 Variables aléatoires réelles

On rappelle que l'univers Ω considéré est fini. Toutes les définitions qui suivent concernent ce seul cas.

Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbf{R}$.	On adoptera les notations habituelles telles que $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet associé à une variable aléatoire.	
Fonction de répartition d'une variable aléatoire X.	$F_X(x) = P([X \leqslant x])$.
Loi de probabilité d'une variable aléatoire.	La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. Résultat admis.
Espérance d'une variable aléatoire finie.	$E(X) = \sum\limits_i x_i P([X = x_i])$.
$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.	Linéarité de l'éspérance.
Variable aléatoire $Y = g(X)$ lorsque g est une fonction à valeurs réelles.	
Théorème de transfert.	$E(g(X)) = \sum\limits_i g(x_i) P([X = x_i])$. Théorème admis
Variance d'une variable aléatoire. Écart-type.	Notations $V(X)$, $\sigma(X)$.
$V(aX + b) = a^2 V(X)$.	
Formule de Kœnig-Huygens.	$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
Variables centrées, centrées réduites.	Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

Enseignement de mathématiques du second semestre

I - Systèmes linéaires et introduction au calcul matriciel

Ce chapitre sera repris, en deuxième année, avec une étude plus spécifique des matrices carrées. Tout développement théorique est hors programme.

1 - Systèmes linéaires

Résolution.
Méthode du pivot de Gauss.

On présentera la méthode du pivot de Gauss à l'aide d'exemples numériques et on se limitera à des systèmes de trois équations à trois inconnues.
On prendra les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes :
$L_i \leftrightarrow L_j$; $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$;
$L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$; $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$.

2 - Calcul matriciel

L'objectif est d'introduire les matrices qui seront utilisées en seconde année. On s'appuie sur des exemples numériques de matrices réelles. La notation des coefficients sous la forme $m_{i,j}$ n'est pas un attendu du programme. Le programme exclut toute notion de structure.

Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes.
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
Matrices lignes, matrices colonnes.
Opérations sur les matrices : multiplication par un scalaire, somme, produit de deux matrices.

Les définitions des opérations sur les matrices seront présentées à l'aide d'exemples issus de situations concrètes. Les propriétés des opérations seront admises sans démonstration et illustrées sur des exemples.

Ecriture matricielle d'un système.

II - Compléments d'analyse

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

*Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de **R**. Les étudiants doivent pouvoir traiter les situations qui s'y ramènent.*

Toute étude théorique sur les limites (suites ou fonctions) est exclue. On utilise autant que possible des représentations graphiques pour présenter et illustrer les concepts introduits. Les résultats seront énoncés sans démonstration.

1 - Suites réelles

Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur le raisonnement par récurrence. On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en *particulier pour illustrer la notion de convergence.* ▶

Suite monotone, minorée, majorée, bornée.	
Limite d'une suite, définition des suites convergentes. Généralisation aux limites infinies.	$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n sauf pour un nombre fini d'entre eux. ▶
Unicité de la limite.	
Opérations sur les limites. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.	On étendra sans démonstration tous les résultats connus sur les limites de fonctions de la variable réelle aux suites. Le théorème de composition de limite d'une suite convergente par une fonction continue est hors-programme.
Théorème de la limite monotone.	Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge. Toute suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2 - Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.	Ces énoncés seront admis.
Fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Caractère bijectif.	On utilisera ce résultat pour étudier des équations du type $f(x) = k$. ▶. On admettra la continuité de la fonction réciproque. Représentation graphique de la fonction réciproque. Toute étude théorique sur les fonctions réciproques est exclue.
Corollaire (TVI et bijection).	Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]a, b[$. Extension au cas des autres intervalles, éventuellement en considérant les limites au bord. Application à la dichotomie. ▶

3 - Fonctions logarithme et exponentielle

Les fonctions hyperboliques sont hors programme.

Fonction logarithme népérien. Dérivée, limites, représentation graphique. Propriétés algébriques du logarithme.	La fonction logarithme est introduite comme primitive de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Fonction exponentielle.
Dérivée, limites, représentation graphique.
Propriétés algébriques de l'exponentielle.

La fonction exponentielle est introduite comme réciproque de la fonction logarithme.
$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.
Notation e^x.

Fonctions puissances (exposant réel).

Croissances comparées des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de l'infini et au voisinage de 0.

Pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0} (x^\alpha \ln x)$.
Pour n entier naturel non nul, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x$.

III - **Probabilités sur un univers fini**

1 - Coefficients binomiaux

On donne dans ce paragraphe l'interprétation combinatoire de ces coefficients mais on évitera toute technicité dans les exercices.

Factorielle, notation $n!$.

Interprétation de $n!$ en tant que nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. ▶

Parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.
Coefficients binomiaux, notation $\dbinom{n}{k}$.
$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Relation $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.
Formule du triangle de Pascal :
$\dbinom{n+1}{k} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1}$.

On pourra faire le lien entre les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant k succès pour n répétitions.
Ces relations pourront faire l'objet de manipulations sur la notation factorielle.
La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul pour le calcul numérique des coefficients. ▶

2 - Lois usuelles finies

Chacune de ces lois sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise. Les étudiants doivent savoir reconnaître ces lois à partir de situations concrètes.

Loi certaine. Espérance et variance.

Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Espérance et variance.
Loi de Bernoulli. Espérance et variance.
Loi binomiale. Espérance et variance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. ▶
Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. ▶

Application : formule du binôme de Newton.
$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec la loi $\mathcal{B}(n,p)$ pour $p = \dfrac{a}{a+b}$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.

IV - **Intégration sur un segment**

Pour le calcul d'intégrales à partir des primitives, on se limitera à des exemples simples. Les changements de variable sont hors programme.

1 - Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.

Dans le cas où f est affine positive, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet f pour dérivée.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.
Toute fonction f continue sur un intervalle y admet au moins une primitive F.

Admis.
Sur un intervalle si F est une primitive de f alors toute autre primitive est de la forme $F+c$ où c est une constante.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Définition : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

2 - Premières propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles.

Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue positive.

Sur des exemples, illustration à l'aide de la méthode des rectangles. ▶

3 - Application

Introduction de la notion de variable aléatoire à densité : exemple de la loi uniforme sur un segment.

Simulation. ▶

Enseignement annuel d'informatique et d'algorithmique

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

L'objectif est de poursuivre la formation initiée au lycée concernant l'algorithmique et l'utilisation de l'outil informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.

L'utilisation de l'outil informatique se fait en continuité avec le cours de mathématiques et sera suivi d'une mise en œuvre sur ordinateur. Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, et seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le programme d'informatique s'articule autour de trois thèmes : études de suites , statistiques descriptives univariées, bases de données relationnelles.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc.), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

Pour certains thèmes, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles notions mathématiques ; celles-ci seront introduites en préambule lors des séances d'informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants, et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation.

Le langage informatique retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales, option technologique, est Python.

1 - Langage Python

Le langage Python propose un grand nombre de bibliothèques logicielles, avec des utilités variées. Les bibliothèques jugées nécessaires sont listées, chacune avec une liste restreinte de fonctions essentielles que les étudiants devront avoir manipulées. Seules celles dans la colonne de gauche sont exigibles, et leur syntaxe précise doit être rappelée. D'autres fonctions, par commodité, pourront être utilisées en classe, mais ceci ne pourra se faire qu'avec parcimonie. L'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique de connaissances mathématiques.

a) Types de base

Affectation : `nom = expression`	L'expression peut être du type numérique, booléen, matriciel (ndarray) ou chaîne de caractères.

`#` permet d'insérer un commentaire	On insiste sur l'importance de l'ajoût judicieux de commentaires.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

b) Structures de contrôle

On réinvestit les notions de compteurs et d'accumulateurs vues au lycée. La maîtrise des structures de programmation de base (if, while, for) constitue l'un des objectifs majeurs de l'informatique en première année.

Instruction d'affectation : =.

Instruction conditionnelle `if`, `elif`, `else`.

Boucle `for` ; Boucle `while`.

Définition d'une fonction :
`def` $f(p_1, \ldots, p_n)$
`return`.

c) Utilisation de bibliothèques

Pour le calcul numérique, le traitement statistique ou la simulation de phénomènes aléatoires, certaines bibliothèques s'avèrent utiles. Elles sont listées ci-dessous avec les fonctions pertinentes. Toute utilisation d'une telle fonction doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

— Dans la bibliothèque `numpy`
Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.e, np.pi`	Constantes e et π.
`np.exp, np.log, np.sqrt, np.abs, np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément.
`np.array.`	Création de tableaux ou matrices. `np.zeros, np.ones, np.eye, np.arange , np.linspace, np.reshape`. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne du tableau.
`np.dot`	Multiplication matricielle. On pourra utiliser `a,b = np.shape(M)` pour obtenir la taille de la matrice `M`.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean, np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M), mean(M,0), mean(M,1)`

— Dans la librairie $\boxed{\texttt{numpy.random}}$

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random`.

— Dans la librairie $\boxed{\texttt{pandas}}$

Exemple d'importation : `import pandas as pd`

`pd.mean, pd.std.`	Indicateurs statistiques.

— Dans la librairie $\boxed{\texttt{matplotlib.pyplot}}$

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes non exigibles `xlim, ylim, axis, grid, legend`. Représentations statistiques `plt.hist, plt.bar, plt.boxplot`.

2 - Liste de savoir-faire exigibles en première année

C1 : Savoir manipuler les structures algorithmiques de base (if, for, while), connaître la syntaxe d'une fonction simple et savoir l'utiliser.

C2 : Savoir produire des graphiques et indicateurs afin d'interpréter des données statistiques.

C3 : Savoir étudier des suites numériques, calculer des valeurs, tracer des graphiques et conjecturer des résultats sur le comportement de la suite.

C4 : Stocker, organiser et extraire des données structurées volumineuses.

C5 : Savoir modéliser des phénomènes aléatoires et effectuer des simulations de variables aléatoires.

II - Liste de thèmes

1 - Suites

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C1** et **C3**)

Calcul des termes d'une suite.	Exploitation graphique des résultats. Exemples : taux d'intérêt, emprunt.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. Valeur approchée d'une constante.
Détermination du rang d'arrêt.	

2 - Statistiques descriptives univariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C2**

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques issues de l'économie, du monde de l'entreprise ou de la finance, en insistant sur les représentations graphiques. On insistera sur le rôle des différents indicateurs de position et de dispersion étudiés.

Série statistique associée à un échantillon. Effectifs, fréquences, fréquences cumulées, diagrammes en bâton, histogrammes.	On pourra également utiliser les commandes : `pd.read_csv, head, shape, pd.describe`
Indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles.	`pd.median, pd.count, pd.sort_values`
Indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile.	
Analyse d'un caractère quantitatif : caractéristiques de position (moyenne, médiane) ; mode(s) ; caractéristiques de dispersion (variance et écart-type empiriques, quartiles, déciles).	On notera bien que les paramètres empiriques sont calculés à partir de l'échantillon observé. On montrera les avantages et les inconvénients des caractéristiques liées à la structure euclidienne (moyenne et écart-type) et ceux qui sont liés à la structure d'ordre (quantiles).

3 - Bases de données

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C4**)

L'administration, les banques, les assurances, les secteurs de la finance utilisent des bases de données, systèmes d'informations qui stockent dans des fichiers les données nombreuses qui leur sont nécessaires. Une base de données relationnelle permet d'organiser, de stocker, de mettre à jour et d'interroger des données structurées volumineuses utilisées simultanément par différents programmes ou différents utilisateurs. Un logiciel, le système de gestion de bases de données (SGBD), est utilisé pour la gestion (lecture, écriture, cohérence, actualisation...) des fichiers dans lesquels sont stockées les données. L'accès aux données d'une base de données relationnelle s'effectue en utilisant un langage informatique qui permet de sélectionner des données spécifiées par des formules de logique, appelées requêtes d'interrogation et de mise à jour.
L'objectif est de présenter une description applicative des bases de données en langage de requêtes SQL (Structured Query Language). Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On pourra pour introduire la problématique donner l'exemple de la base de données utilisée par un progiciel de gestion intégré (PGI), outil informatique permettant de piloter une entreprise, présenté dans le cours de management. Cette base de données stocke les informations communes à de nombreux services (comptabilité,gestion du personnel, gestion des stocks, fichier clients...). On introduira les concepts d'interrogation et de mise à jour d'une base de données à l'aide d'exemples simples issus de ce contexte.

Modèle relationnel : relation, attribut, domaine, clef primaire "PRIMARY KEY", clef étrangère "FOREIGN KEY", schéma relationnel.	
Vocabulaire des bases de données : table, champ, colonne, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.	On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier "INTEGER", chaîne "TEXT".
Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	
Opérateurs arithmétiques $+$, $-$, $*$.	
Opérateurs de comparaison : =, <>, <, <=, >, >=.	
Opérateurs logiques : "AND", "OR", "NOT".	

a) Commandes exigibles

"WHERE"	
"SELECT nom_de_champ FROM nom_de_table".	Sélection de données dans une table.
"INSERT INTO nom_de_table ".	Insertion de données dans une table. On pourra utiliser "VALUES (élément1, élément2,...)".
"DELETE FROM nom_de_table ".	Suppression de données d'une table.
"UPDATE nom_de_ table ".	Mise à jour de données d'une table.

b) Commandes non exigibles

On pourra utiliser par commodité et si besoin la liste d'opérateurs, fonctions et commandes ci-dessous. Ce ne sont pas des attendus du programme et ils sont non exigibles.

Les opérateurs ensemblistes : union "UNION", intersection "INTERSECTION", différence "EXCEPT".

Les opérateurs spécifiques de l'algèbre relationnelle : projection, sélection (ou restriction), renommage, produit cartésien .

Les fonctions d'agrégation : min "MIN", max "MAX", somme "SUM", moyenne "AVG", comptage "COUNT".

Les commandes "DISTINCT", "ORDER BY"

4 - Probabilités

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1** **C2** et **C5**)

Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.	Loi uniforme, loi binomiale. `rd.randint` .
Simulation de phénomènes aléatoires.	

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Programmes de mathématiques - informatique

2nde année

Table des matières

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, notamment dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.

- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC voie technologique se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés d'économie et de gestion dispensés en Grande Ecole ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Il s'organise autour de quatre points forts :

- En algèbre linéaire, le programme se concentre sur le calcul matriciel. Le principal objectif est l'introduction de la notion de valeurs propres et de vecteurs propres et la diagonalisation des matrices carrées de taille inférieure à 3. On évitera des exemples trop calculatoires.

- En analyse, les séries et les intégrales généralisées sont étudiées en vue de leurs applications aux probabilités (variables aléatoires discrètes infinies et variables aléatoires à densité).

- En probabilités, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, les notions sur les variables aléatoires à densité, abordées dès la première année, sont complétées. L'objectif de cette partie du programme est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse et une compréhension plus aboutie des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance que les étudiants ont rencontrés dès le lycée.

- Les travaux pratiques de mathématiques et d'informatique sont organisés autour de la poursuite de l'étude des fonctionnalités du langage SQL et, avec Python, de la simulation de lois de probabilités en continuité du programme de première année, et de thèmes de statistiques en lien avec le programme de mathématiques, avec l'objectif d'éclairer ces notions par des illustrations concrètes. Les savoir-faire et compétences que les étudiants doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme. L'enseignement de ces travaux pratiques se déroulera sur les créneaux horaires dédiés à l'informatique.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées. Dans certaines situations, en continuité avec les programmes de lycée, l'utilisation d'un tableur peut s'avérer adaptée.

Les étudiants ont déjà une pratique algorithmique acquise au lycée. Dans leurs études futures, ils seront amenés à utiliser différents logiciels conçus pour la résolution de problématiques liées à certains contextes. Une pratique régulière d'outils informatiques les prépare utilement en ce sens. Par ailleurs, l'utilisation d'un outil informatique (programme informatique ou tableur) permet l'observation de résultats mathématiques en situation, l'exploration et la modélisation de situations non triviales plus réalistes et offre la possibilité d'expérimenter et de conjecturer.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - **Matrices**

Le programme exclut toute notion de structure. On ne traite que le cas des matrices réelles.

Matrices carrées d'ordre n. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Matrices triangulaires, matrices diagonales, matrice identité. Matrices inversibles.	
Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire.	Résultat admis.
Critère d'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.	$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Formule de l'inverse dans ce cas. La notation $\det(A)$ pourra être utilisée, mais elle sera limitée au cas des matrices carrées d'ordre 2. La notion de déterminant est hors-programme.
Exemples de calcul des puissances n-ièmes d'une matrice. Cas d'une matrice diagonale.	
Formule du binôme pour les matrices qui commutent.	On se limitera à des exemples simples, par exemple lorsque l'une des matrices est nilpotente.

Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires.

Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss.
Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.

On se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

II - **Compléments d'intégration : propriétés de l'intégrale**

Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur les calculs d'intégrales introduits au S2.

Linéarité de l'intégrale.

Intégration par parties.

Si u, v, u' et v' sont des fonctions continues sur $[a, b]$, alors :
$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$

Positivité de l'intégrale. Comparaison d'intégrales.

III - **Compléments sur les sommes et séries numériques**

1 - **Compléments sur les sommes**

Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur les calculs de sommes traités en première année $\boxed{\blacktriangleright}$.

Somme télescopique.

Décalage d'indice.

On se limitera, sur des exemples simples, à des décalages d'indice de type $k' = k + 1$.

2 - **Séries**

Les séries sont introduites exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Définition. Convergence d'une série. Somme d'une série convergente.

Condition nécessaire de convergence.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Série géométrique. Convergence et somme.

La série $\sum x^n$ converge si et seulement si $|\,x\,| < 1$, et dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
Les dérivées des séries géométriques ne font pas partie des attendus du programme.

IV - **Probabilités et statistiques**

Tout excès de technicité est exclu.

1 - **Couples de variables aléatoires discrètes finies**

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires. Lois marginales, lois conditionnelles.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X=x] \cap [Y=y])$.
Indépendance de deux variables aléatoires.	X et Y sont indépendantes si, pour tous intervalles réels I et J, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants. On remarquera que si l'une des variables aléatoires X, Y est constante, X et Y sont indépendantes.
Espérance d'une somme de deux variables aléatoires, linéarité de l'espérance.	Résultat admis.
Espérance d'un produit de deux variables aléatoires.	$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP([X=x] \cap [Y=y])$. Résultat admis.
Cas de deux variables aléatoires X et Y indépendantes.	$E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis. La réciproque est fausse.
Covariance. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Cov}(X,a) = 0$. $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.
Formule de Kœnig-Huygens.	$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle, la réciproque étant fausse.
Variance d'une somme de deux variables aléatoires.	
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X,Y)$. Si $\sigma(X)\sigma(Y) \neq 0$, $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}\,(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
Propriétés.	$\lvert\rho(X,Y)\rvert \leqslant 1$. Interprétation dans le cas où $\rho(X,Y) = \pm 1$.

2 - Variables aléatoires discrètes infinies

a) Généralités

On se limitera aux variables aléatoires positives dont l'image est indexée par $\mathbf{N}$. *Aucune difficulté théorique ne sera soulevée au moment de l'extension des propriétés.*

Notion d'espace probabilisé avec Ω non fini.
Extension des définitions et des propriétés des variables aléatoires discrètes au cas où l'image est un ensemble infini dénombrable : loi de probabilité, fonction de répartition, espérance, variance, écart-type.

b) Lois usuelles

Chacune des lois usuelles sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise.

Loi géométrique.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La reconnaissance de la loi géométrique comme loi du premier succès est exigible.
Espérance et variance.	Résultats admis.
Loi de Poisson.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
Espérance et variance.	Résultats admis.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Réduction des matrices carrées

L'objectif est l'introduction de la notion de valeurs propres et de vecteurs propres d'une matrice. La notion de polynôme minimal, la résolution générale des systèmes $AX = \lambda X$ (avec λ paramètre quelconque) et toute théorie sur la réduction sont hors programme.

Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est à proscrire. Dans la pratique, on se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

Polynôme d'une matrice. Polynôme annulateur.	Sur des exemples, utilisation d'un polynôme annulateur pour la détermination de l'inverse d'une matrice carrée. Toutes les indications devront être données aux candidats pour l'obtention d'un polynôme annulateur. On pourra vérifier que le polynôme $X^2 - (a+d)\,X + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Matrices carrées diagonalisables.	Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice carrée P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$.
Valeur propre, vecteur propre d'une matrice carrée.	Avec les notations de la définition précédente, on remarquera que la matrice P est construite à partir de vecteurs propres de A et la matrice D des valeurs propres correspondantes, mais leur construction n'est pas exigible.
Si Q est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de Q.	Résultat admis.

Recherche de valeurs propres.	Pour ce faire, on utilisera un polynôme annulateur. La recherche de vecteurs propres ne pourra être demandée que dans le cas de valeurs propres de multiplicité 1. Dans les autres cas, les vecteurs propres devront être donnés.
Sur des exemples, diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre inférieur ou égal à 3.	
Application au calcul des puissances de A.	Sur des exemples, étude de suites linéaires récurrentes d'ordre 2 et de systèmes de suites récurrentes. La méthode générale de résolution est hors-programme.

II - **Compléments d'analyse**

Les notions introduites dans ce chapitre le sont exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Le calcul des intégrales généralisées est effectué par des recherches de primitives sur des intervalles du type $[a, b]$, l'application de la relation de Chasles, et des passages à la limite en $-\infty$ et/ou $+\infty$.

Les intégrales généralisées en un point réel sont hors-programme.

Intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Convergence et définition.	L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie, et dans ce cas, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$.
Intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $]-\infty, b]$.	
Extension aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée lors du passage du calcul des intégrales des fonctions continues à celui des intégrales des fonctions continues sauf en un nombre fini de points.

III - **Probabilités et statistiques**

1 - Variables aléatoires à densité continue par morceaux

Ce paragraphe généralise l'étude de la loi uniforme effectuée en première année.

Le passage du cas discret au cas continu n'est pas explicité. On se limitera à des calculs de probabilités du type $P([X \in I])$, où I est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Densité de probabilité.	Une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ est une densité de probabilité si elle est positive, continue sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. On se limitera en pratique à des fonctions continues par morceaux, cette notion étant elle-même hors-programme.
Variable aléatoire à densité.	Une variable aléatoire X admet une densité si sa fonction de répartition F_X peut s'écrire sous la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une densité de probabilité. Sur des exemples, détermination d'une densité de $aX+b$ ou de X^2.
Espérance, variance et écart-type.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

2 - Variables aléatoires à densité usuelles

Chacune des lois usuelles sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise.

Loi uniforme. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.
Loi exponentielle. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
Loi normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres m et σ^2, où $\sigma > 0$. Espérance et variance.	Densité. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Résultats admis.
Loi normale centrée réduite.	Densité. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ si et seulement si $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On attend des étudiants qu'ils sachent utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. Pour tout réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

3 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.	Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance, $$\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$ Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = \lvert X \rvert^r, r \in \mathbf{N}^*$.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, $$\forall \varepsilon > 0, \quad P([\mid X - E(X) \mid \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$ Résultat non exigible.

b) Suites de variables aléatoires discrètes finies

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires.	Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, pour tout choix de n intervalles réels $I_1, \ldots, I_n$, les événements $[X_1 \in I_1], \ldots, [X_n \in I_n]$ sont mutuellement indépendants.
Indépendance mutuelle d'une suite de variables aléatoires.	Les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
Espérance de la somme de n variables aléatoires.	
Variance d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.	Application à la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

c) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.	Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P([\lvert \overline{X}_n - m \rvert \geqslant \varepsilon]) = 0$. Illustrations. $\boxed{\blacktriangleright}$.

4 - Estimation

L'objectif de ce chapitre est, sans insister sur les aspects formels, de dégager la signification de la loi des grands nombres (approche fréquentiste) et de mettre en place la problématique de l'estimation. On introduit sur un exemple simple et concret (par exemple un sondage) cette problématique : on considère un phénomène aléatoire, qu'on a abstrait par une variable aléatoire réelle X dans une famille de lois *dépendant d'un paramètre inconnu θ (sur l'exemple du sondage, une loi de Bernoulli). Le problème de l'estimation consiste alors à déterminer une valeur approchée du paramètre θ à partir d'un échantillon de données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène.*

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Les $X_1, \ldots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ. On pourra éventuellement introduire la notion d'estimateur, mais ce n'est pas un attendu du programme. Dans les cas considérés, le paramètre sera déterminé par la moyenne de la variable aléatoire. On s'appuie sur la loi faible des grands nombres pour justifier l'utilisation de l'estimateur $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ pour estimer l'espérance commune des variables aléatoires indépendantes X_i de même loi que X.

Echantillon.

a) Estimation ponctuelle.

La réalisation de $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ observée sur l'échantillon $x_1, \ldots, x_n$ est l'estimation du paramètre obtenue sur cet échantillon.

On donne les exemples de la loi de Bernoulli et de la loi de Poisson.

b) Estimation par intervalle de confiance.

La démarche consiste non plus à donner une estimation ponctuelle du paramètre θ mais à trouver un intervalle aléatoire, appelé intervalle de con

fiance, qui le contienne avec une probabilité minimale donnée. Ce paragraphe a uniquement pour but de préciser le vocabulaire employé. Les situations seront étudiées sous forme d'exercices dans des séances d'exercices et de travaux pratiques, aucune connaissance autre que ce vocabulaire n'est exigible sur les intervalles de confiance. On introduit l'intervalle de confiance obtenu à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On en explique la signification. On remarque que la précision augmente avec la taille de l'échantillon. La démonstration n'est pas un attendu du programme.

Intervalle de confiance : La probabilité que l'intervalle $\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{V(X)}{na}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{V(X)}{na}}\right]$ contienne la moyenne $E(X)$ est supérieure à $1 - a$.

On se limitera au cas d'une variable de Bernoulli.
Résultat non exigible.
En pratique, la variance V est inconnue, mais on peut la majorer par $\frac{1}{4}$.
On particularise numériquement les intervalles de confiance au seuil de confiance de 90 % et de 95 %.

Intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart-type est connu.

On remarque que dans la pratique, l'écart-type n'est pas connu, ce qui conduit à utiliser l'écart-type de l'échantillon (écart-type empirique).

Enseignement annuel d'informatique et d'algorithmique

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

En première année, les élèves ont consolidé les bases de manipulation du langage Python. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année est de permettre aux étudiants de l'utiliser de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Le programme d'informatique s'articule autour de quatre thèmes : statistiques descriptives bivariées, études de suites et de fonctions, simulation de lois, estimation.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc.), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

Pour certains thèmes, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles notions mathématiques ; celles-ci seront introduites lors des séances d'informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants, et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation.

Le langage informatique retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales, option technologique, est Python.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes exigibles du programme de première année sont exigibles, et leur syntaxe précise doit être rappelée. D'autres fonctions, par commodité, pourront être utilisées en classe, mais ceci ne pourra se faire qu'avec parcimonie. L'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique de connaissances mathématiques. Ces commandes supplémentaires devront être présentées en préambule et toutes les précisions nécessaires devront être données lors de leur utilisation et leur interprétation. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de «copier-coller» qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

1 - Liste des savoir-faire et compétences

C1 : Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique (simple, double) ou d'une loi.

C2 : Modéliser et simuler des phénomènes (aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique.

C3 : Porter un regard critique sur les méthodes d'estimation et de simulation.

C4 Stocker, organiser et extraire des données structurées volumineuses.

II - **Langage Python**

Les commandes exigibles ont été listées dans le programme de première année.

III - **Liste des thèmes**

1 - Statistiques descriptives bivariées

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C1** et **C3**)

On s'appuiera sur les représentations graphiques pour montrer l'intérêt et les limites des indicateurs.

Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage.	On tracera le nuage de points et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire.
Covariance empirique, coefficient de corrélation empirique, droites de régression.	Analyse de deux caractères quantitatifs : covariance empirique, corrélation linéaire empirique, ajustement affine par la méthode des moindres carrés. On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer et on soulignera la distinction entre corrélation et causalité. On pourra donner des exemples d'utilisation de la droite de régression pour faire des prévisions dans le cadre de problèmes concrets. On pourra utiliser les commandes : `plt.scatter, np.polyfit, np.corrcoef` ou un tableur

2 - Simulation de lois, application au calcul d'espérances

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, et **C3**)

Ces simulations de variables aléatoires seront introduites comme illustrations de problèmes concrets, et permettront d'en vérifier la compréhension par les étudiants. Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique et la comparer à la fonction de répartition théorique. On pourra utiliser les générateurs de nombres aléatoires selon les lois uniformes, binomiales, géométriques, normales, de la bibliothèque `numpy.random` *:* `rd.random, rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson, rd.exponential, rd.normal` .

Simulation de la loi uniforme sur $[0, 1]$; sur $[a, b]$.	
Simulation de phénomènes aléatoires à partir de lois usuelles. Méthodes de simulation d'une loi géométrique.	Comparaison entre différentes méthodes : utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation du générateur `rd.random`.
Simulation de lois usuelles.	

3 - Bases de données

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C4**)

Dans la continuité du programme de première année, on poursuit l'étude du langage SQL avec la création de table et l'interrogation avancée via l'instruction JOIN. On introduira ces concepts à l'aide d'exemples simples issus de contextes appropriés.

a) Commandes exigibles

"SELECT* FROM nom_de_table_1 INNER JOIN nom_de_table_2".	Réalisation d'une jointure. On pourra ajouter une condition " ONΦ" dans le cas où Φ est une conjonction d'égalités. Aucune autre notion de jointure n'est dans ce programme.
"CREATE TABLE nom_de_table".	Création d'une table.

b) Commandes non exigibles

Les commandes non exigibles ont été listées dans le programme de première année.

4 - Théorème limite central

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, et **C3**)

L'objectif est ici de dégager des conséquences importantes du théorème limite central qui n'est pas au programme. On met en œuvre sur des exemples ce théorème, qu'on pourra énoncer sans formaliser la notion de convergence. On souhaite dégager la pertinence de l'utilisation de la loi normale pour modéliser les phénomènes résultant de nombreux phénomènes aléatoires indépendants et de l'intervalle de confiance asymptotique dont on pourra mettre en valeur la précision.

Etude de la distribution des moyennes empiriques par simulation informatique de la loi de $X = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi discrète d'espérance μ et d'écart type σ.	On cherche à visualiser la convergence vers la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. On pourra produire un échantillon de taille N des moyennes empiriques d'échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ, et le représenter sous forme d'un histogramme. On observera l'effet de l'augmentation de n sur la dispersion des moyennes.
Simulation informatique de la loi de $X = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme à densité sur $[0, 1]$.	On remarquera que la variable aléatoire centrée réduite associée à X est une approximation de la loi normale centrée réduite et on sensibilisera les étudiants au théorème limite central, en testant cette simulation avec d'autres lois.
Intervalle de confiance asymptotique.	On compare l'intervalle de confiance obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec l'intervalle de confiance asymptotique, qu'on présentera en invoquant le théorème limite central pour estimer le paramètre d'une loi de Bernoulli.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 2
Programmes de droit et d'économie

1ère et 2nde années

ECT – PROGRAMMES DE DROIT ET D'ÉCONOMIE

PRÉAMBULE

Les enseignements de Droit et d'Économie, en classe préparatoire aux grandes écoles voie économique et commerciale option technologique, s'inscrivent dans la continuité de l'enseignement « Droit-économie » prodigué au lycée en voie technologique. Chaque programme propose des approfondissements et des prolongements en prenant appui sur des questionnements en lien avec la réalité dans ses dimensions juridiques ou économiques.
L'enseignement du droit et de l'économie permettent de développer chez l'étudiant :

- une capacité à comprendre les enjeux du monde contemporain, afin de pouvoir mener une réflexion critique ;
- une compréhension de la diversité des approches autour d'un même sujet ;
- un discernement pour exercer sa citoyenneté en se situant au sein de la société, en identifiant les droits et obligations afférents à une situation et en formulant des raisonnements argumentés.

1- PROGRAMME DE DROIT

L'enseignement de droit vise à développer la compréhension et la maîtrise des mécanismes juridiques fondamentaux. Ce programme centré sur l'entreprise permet de parcourir un éventail de questions rencontrées lors de l'exercice d'une activité économique.
Il accorde une place importante à la veille juridique qui exprime le caractère évolutif du droit et qui s'avère indispensable aujourd'hui pour tout acteur devant se référer au droit. Structurée autour d'un thème permanent et défini, la veille juridique vise à mobiliser les sources de droit comme objet de l'étude et de la compréhension de l'évolution du droit.

S'inscrivant dans la continuité de l'enseignement de droit en voie technologique, l'étudiant va poursuivre ses apprentissages autour de 3 objectifs :

- acquérir une culture juridique à travers notamment une activité de veille juridique qui vise à repérer les évolutions du droit pour en identifier les incidences afférentes ;
- mobiliser des notions juridiques à partir de l'analyse de situations juridiques didactisées issues de la vie des entreprises ;
- mettre en œuvre les différentes méthodologies juridiques : qualification juridique, argumentation, recherche et exploitation d'une documentation juridique.

Le programme s'articule en deux parties :

- une première partie consacrée à la veille juridique,
- une seconde partie structurée autour de 5 thèmes présentant chacun un questionnement. Ce choix vise à favoriser le développement de l'argumentation par la construction de réponses aux questions formulées. Dans ce cadre, l'étudiant sera amené à développer les capacités énoncées à partir des contenus notionnels et d'éléments issus de l'actualité juridique.

PREMIÈRE PARTIE - VEILLE JURIDIQUE : LE DROIT DES ENTREPRISES, UN DROIT ÉVOLUTIF ET VIVANT

Dans le cadre de l'enseignement du droit, l'activité de veille juridique doit permettre, au travers notamment de l'étude des sources de droit, de faire prendre conscience à l'étudiant du caractère évolutif du droit et des liens qu'il entretient avec les différentes activités de l'entreprise.
L'étudiant développe la capacité à analyser et à exploiter les sources de droit pour comprendre comment les sources de droit principalement nationales et européennes encadrent l'activité des entreprises et comment elles évoluent au regard du thème de veille défini ci-dessous.
Les sources de droit obéissent à une hiérarchie qui forme un ordre juridique cohérent. Les contenus notionnels visés dans la seconde partie du programme sont issus de ces sources.

L'activité de veille juridique accompagne donc l'acquisition et la compréhension des notions et capacités tout au long de l'étude du programme et porte sur le thème suivant : **Activités des entreprises et libertés individuelles.**

Le thème de veille juridique constitue un fil directeur dans la formation des étudiants et son exercice s'opère en continu au fur et à mesure de l'avancée du programme et dans la limite de celui-ci.

L'activité de veille pourra permettre aux étudiants de développer et de construire un travail collaboratif valorisant ainsi une capacité nécessaire à la poursuite d'études supérieures. L'accès à des équipements informatiques et à des outils numériques est nécessaire afin de permettre aux étudiants de mobiliser les différentes modalités de veille et de curation.
À cette occasion, sont mobilisées et enrichies les capacités méthodologiques et transversales de l'étudiant(e) énoncées ci-dessous :

- repérer parmi les sources du droit les éléments pertinents permettant de comprendre l'évolution du droit des entreprises ;
- analyser et exploiter une documentation juridique fournie (arrêt, article juridique…) au regard des éléments de veille étudiés ;
- déterminer la règle applicable dans une situation juridique donnée ;
- apprécier l'apport d'un document au regard du thème de la veille juridique.

D'autres capacités plus spécifiques à l'étude des sources du droit sont mobilisées par les étudiant(e)s tout au long de leurs deux années de formation dans la perspective du thème de veille :

- analyser les sources de droit garantes des libertés individuelles des personnes dans le cadre de l'activité économique ;
- expliquer le rôle du pouvoir législatif et le rôle du pouvoir réglementaire ;
- analyser le rôle et l'apport de la jurisprudence de la Cour de cassation et de la Cour européenne des droits de l'homme (CEDH) pour les entreprises ;
- analyser et comprendre la portée des décisions d'autorités administratives indépendantes (AAI) pour les entreprises et l'activité économique ;
- identifier les missions du défenseur des droits ;
- expliquer l'intérêt pour l'entreprise de recourir au droit négocié dans l'exercice de ses activités.

DEUXIÈME PARTIE - LES THÈMES JURIDIQUES MOBILISANT DES QUESTIONS POSÉES PAR LE DROIT AUX ENTREPRISES

THÈME 1 - LE CADRE JURIDIQUE DE LA VIE DES ENTREPRISES

- **Qu'est-ce que le droit pour les entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Identifier les finalités et spécificités de la règle de droit pour l'activité de l'entreprise. ***- Expliquer la distinction entre les différents droits des personnes juridiques.*** ***- Justifier l'application du droit à une entreprise.***	La règle de droit : finalités et caractéristiques Le droit objectif et les droits subjectifs La personnalité juridique La classification des droits La distinction entre droits patrimoniaux et droits extrapatrimoniaux Le droit au respect de la vie privée Les caractéristiques juridiques de l'entreprise

- **Comment s'articulent les sources du droit pour encadrer l'activité des entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Déterminer l'origine des différentes sources du droit s'appliquant aux entreprises. ***- Expliquer l'application de la hiérarchie des sources de droit dans le cadre de l'activité économique.*** ***- Distinguer les missions des organes de contrôle de la hiérarchie des sources .***	La typologie des sources de droit La classification des institutions et organes nationaux et européens créateurs de la règle de droit Les acteurs et les mécanismes du contrôle de la hiérarchie des sources : le contrôle de légalité, contrôle de constitutionnalité, le contrôle de conventionalité

- **Comment le droit permet-il de régler les litiges impliquant des entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les grands principes de la justice qui s'appliquent aux entreprises en France. ***-Proposer une voie de recours pertinente d'accès à la justice.*** ***- Déterminer le champ d'application d'une règle de droit.*** ***- Apporter la preuve de l'existence d'un droit.***	Les grands principes de la justice Le principe du contradictoire Les voies de recours : appel, pourvoi et saisine de la CEDH La spécialisation des règles de droit Les conditions de mise en œuvre de la règle Les actes et faits juridiques Les systèmes de preuve Les procédés de preuve

THÈME 2 - LA PROTECTION DES DROITS DES ENTREPRISES

- **Quelle est l'étendue des libertés économiques et quelles en sont les limites?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Justifier le rôle et la portée des libertés économiques. ***- Analyser les limites des libertés économiques.*** ***- Qualifier les pratiques anticoncurrentielles.***	La liberté d'entreprendre La liberté du commerce et de l'industrie L'ordre public de protection ; l'ordre public de direction La liberté de la concurrence Les pratiques anticoncurrentielles : entente illicite et abus de position dominante

- **Comment entreprendre ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Conseiller sur le choix d'un type de structure juridique pour entreprendre. ***- Analyser les conséquences de l'acquisition de la personnalité juridique pour l'entreprise.*** ***- Identifier les conditions d'attribution de la commercialité.***	L'entreprise individuelle (dans le domaine commercial) Le type de société commerciale : notion de société de personnes, de société de capitaux, de société hybride Les mécanismes juridiques de protection du patrimoine des propriétaires de l'entreprise Les personnes physiques et personnes morales La qualité de commerçant

- **Comment le droit encadre-t-il l'exploitation des actifs immatériels des entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Identifier et mettre en œuvre les modalités juridiques de protection de la propriété industrielle. ***- Analyser les conditions de mise en œuvre du RGPD.*** ***- Analyser la protection de l'entreprise face à des comportements déloyaux.*** ***- Identifier les informations protégées par le secret des affaires et les modalités juridiques de cette protection.***	La propriété industrielle Le brevet La marque Les mécanismes de protection : action civile en contrefaçon, action en nullité, action en déchéance, action en épuisement du droit La territorialité de la protection : protection nationale et européenne Le RGPD : données personnelles, traitement et territorialité Les faits constitutifs de concurrence déloyale Le secret des affaires

THÈME 3 - LE CONTRAT : UN INSTRUMENT JURIDIQUE D'ORGANISATION DES RELATIONS ÉCONOMIQUES DES ENTREPRISES AVEC LEURS PARTENAIRES

➢ **Quels sont les enjeux juridiques de la formation du contrat pour les entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Expliquer le rôle du contrat dans la sécurisation des relations de l'entreprise avec ses partenaires. ***- Analyser les modalités de formation du contrat dans le cadre d'une relation économique.***	La notion d'obligation La classification des contrats Le principe du consensualisme Le principe de la force obligatoire du contrat pour les parties Le principe de la liberté contractuelle La négociation du contrat La formation du contrat Les vices du consentement La violence économique Le principe de bonne foi (négociation, formation et validité) L'action en nullité

➢ **Comment le contrat permet-il à l'entreprise de s'adapter à l'évolution du contexte économique ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Évaluer la possibilité de la révision du contrat pour l'entreprise. ***- Analyser les effets juridiques de certaines clauses contractuelles.***	Le droit à la renégociation dans le cadre de l'imprévision La clause résolutoire La clause pénale La clause suspensive La clause de renégociation

➢ **Quelles sont les réponses juridiques en cas de manquement contractuel ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Conseiller un ou plusieurs mécanismes mobilisables par le créancier en cas de manquement contractuel. ***- Identifier les causes d'exonération possibles.***	L'exception d'inexécution L'exécution forcée La réduction du prix La résolution ou résiliation du contrat Les conditions de la mise en jeu de la responsabilité contractuelle La réparation La clause limitative de responsabilité La clause d'exonération de responsabilité La cause étrangère (force majeure, fait d'un tiers et fait du créancier)

- **Comment préserver l'équilibre contractuel entre l'entreprise et le consommateur ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
-Qualifier une personne de consommateur ou de non professionnel dans une situation juridique donnée. ***- Montrer les spécificités d'un contrat de consommation.*** ***- Analyser les conséquences juridiques d'une clause d'abusive en droit de la consommation.*** ***- Analyser les obligations des entreprises pour l'exécution du contrat de vente formé avec un consommateur.***	La notion de consommateur, non-professionnel et professionnel L'obligation d'information L'obligation de conseil Le droit de rétractation du consommateur La protection du consommateur dans le cadre du contrat électronique La garantie légale de conformité La clause abusive L'obligation de délivrance conforme La garantie des vices cachés

THÈME 4 - LA RESPONSABILITÉ CIVILE EXTRACONTRACTUELLE DES ENTREPRISES

- **Sur quels fondements l'entreprise peut-elle voir sa responsabilité extracontractuelle engagée ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Distinguer les fondements de la responsabilité civile de la responsabilité pénale. ***- Identifier les caractéristiques du dommage réparable dans une situation juridique donnée.*** ***- Conseiller une ou plusieurs actions en réparation dans une situation donnée et en déduire les modes d'exonération possibles.*** ***- Évaluer le risque de mise en œuvre de la responsabilité civile du fait du préjudice écologique résultant de l'activité d'une entreprise.***	La distinction entre responsabilité civile et responsabilité pénale Les différents types de dommages Les caractères du dommage réparable Les conditions de mise en jeu de la responsabilité civile extracontractuelle La responsabilité du fait personnel La responsabilité du fait des choses La responsabilité de l'employeur du fait de ses salariés Les causes d'exonération (faits justificatifs et cause étrangère) Le régime spécial de responsabilité du fait des produits défectueux et ses causes spécifiques d'exonération Le préjudice écologique

- **Comment le droit cherche-t-il à préserver l'équilibre dans les relations commerciales ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Identifier la présence d'un déséquilibre dans une relation commerciale et en déduire les conséquences juridiques. ***- Caractériser une rupture brutale de relations commerciales établies et en déduire les conséquences juridiques.***	Les pratiques restrictives de concurrence Le déséquilibre significatif L'obtention d'un avantage sans contrepartie La rupture brutale des relations commerciales établies

THÈME 5 : LES RELATIONS INDIVIDUELLES DE TRAVAIL DANS LES ENTREPRISES

- **Comment le droit reconnait-il l'existence d'une relation de travail avec les entreprises ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Distinguer le contrat de travail du contrat d'entreprise ou du contrat de prestation de services.	La définition du contrat de travail Les critères d'existence du contrat de travail
- Conseiller le choix d'un contrat de travail dans une situation donnée.	Les principaux types de contrats de travail : le CDI et le CDD La conclusion des contrats de travail Le régime juridique du CDI et du CDD
- Analyser l'exercice du pouvoir de direction de l'employeur face aux droits des salariés.	Les pouvoirs de l'employeur Les droits individuels des salariés

- **Quels sont les principaux aménagements que les entreprises peuvent apporter à la relation de travail ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser la mise en œuvre de clauses particulières du contrat de travail dans une situation donnée.	La clause d'essai La clause de non-concurrence La clause de mobilité géographique
- Qualifier l'évolution de la relation de travail et en déduire le régime juridique applicable.	La modification du contrat de travail Le changement des conditions de travail Les effets sur le contrat de travail de la modification de la situation juridique de l'employeur

- **Comment les parties au contrat de travail peuvent-elles rompre leur relation de travail ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Déterminer le mode de rupture du contrat de travail adapté dans une situation donnée et en déduire le régime juridique applicable. ***- Analyser les suites de la rupture du contrat de travail.***	Les motifs du licenciement pour fait personnel Les motifs du licenciement economique La rupture initiée par le salarié : la démission La rupture conventionnelle individuelle La rupture conventionnelle collective La prise d'acte de la rupture La transaction La mise en oeuvre de la clause de non concurrence La mise en oeuvre de la clause de confidentialité

2- PROGRAMME D'ÉCONOMIE

L'enseignement d'économie vise à développer la compréhension du monde contemporain, à travers l'étude de questions économiques permettant aux étudiants de construire un raisonnement argumenté à partir d'un dossier documentaire ou d'une problématique posée.

S'inscrivant dans la continuité de l'enseignement d'économie en voie technologique, l'étudiant va poursuivre ses apprentissages méthodologiques autour de 4 objectifs :

- analyser une documentation économique non retraitée et de nature variée (textes économiques, tableaux, graphiques, schémas…) ;
- mobiliser des notions et des données économiques pour expliquer des phénomènes économiques ;
- structurer une argumentation sur un sujet contemporain donné ;
- synthétiser un dossier documentaire après avoir hiérarchisé les informations.

Au travers des différents travaux proposés, les étudiants seront amenés à développer leur sens critique.

Le programme s'articule autour de 5 thèmes présentant chacun un questionnement. Ce choix vise à favoriser le développement de l'argumentation par la construction de réponses aux questions formulées. Dans ce cadre, l'étudiant sera amené à développer les capacités énoncées à partir des contenus notionnels et d'éléments issus de l'actualité économique.

THÈME 1 : LES FONDEMENTS ET LES FINALITÉS DE L'ACTIVITÉ ÉCONOMIQUE

➢ **Comment l'activité économique crée-t-elle de la richesse ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Distinguer les principales ressources mobilisées pour produire des biens et des services. ***- Analyser l'allocation des ressources.*** ***- Évaluer la pertinence du PIB pour mesurer la richesse.*** ***-Comparer à l'aide du PIB les performances économiques d'un pays dans le temps et dans l'espace.***	La rareté des ressources Les principales classifications des biens et services Les ressources pour produire La technologie de production Les besoins humains L'allocation des ressources : choix économique sous contraintes, coût d'opportunité, raisonnement à la marge Le Produit intérieur Brut (PIB) Le revenu national brut (RNB)

➢ **Quelles sont les transformations contemporaines du système productif ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Caractériser un système productif national. ***- Identifier les principales transformations contemporaines du système productif.*** ***- Analyser les causes des mutations du système productif et les défis économiques et sociaux qui en découlent.***	La structure du système productif La classification des activités économiques (secteurs et branches) La concentration de l'offre, Les effets de la demande (notamment niveau de vie et effet revenu) Les effets de l'offre (notamment gains de productivité et évolution des prix relatifs) La tertiarisation La désindustrialisation La numérisation de l'économie L'ouverture des économies

➢ **Quelles relations d'interdépendance entretiennent les acteurs de l'activité économique ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Décrire les fonctions et les ressources principales des agents économiques résidents. ***- Expliquer le rôle de la monnaie dans les échanges entre les agents économiques.*** ***-Identifier les différents flux d'échanges entre les agents économiques résidents et non-résidents.*** ***- Analyser les relations d'interdépendance entre les différents agents économiques.***	Les secteurs institutionnels Les principales fonctions économiques des agents Les ressources principales des agents La monnaie : attributs, fonction, formes, les crypto-actifs. La création monétaire Les différents types de marchés Les flux de production, de consommation et d'investissement entre les agents résidents Les flux de revenu : revenus primaires et revenu disponible Les principaux flux du compte des transactions courantes L'équilibre emplois et ressources en biens et services L'équilibre épargne-investissement en économie fermée et ouverte

THÈME 2 : LE FONCTIONNEMENT DE L'ÉCONOMIE DE MARCHÉ

- **Pourquoi l'économie de marché s'est-elle imposée ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
-Expliquer la formation du prix d'équilibre sur un marché. ***-Discuter des différentes fonctions d'un prix sur un marché.*** ***-Expliquer le rôle du marché dans le fonctionnement de l'économie.***	Les déterminants de l'offre et de la demande et leurs effets La loi de l'offre et de la demande Les rôles des prix : rôle informationnel, rôle autorégulateur, rôle incitatif L'équilibre économique de marché L'intervention de l'État sur les prix Les principes du capitalisme Le libéralisme et l'interventionnisme L'économie de marché(s)

- **Quelles sont les dynamiques contemporaines de la concurrence et de la compétition entre firmes sur les marchés ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Caractériser un marché. ***- Analyser le rôle de la concurrence dans une économie de marché.*** ***- Expliquer la réalité de la concurrence imparfaite sur de nombreux marchés.***	Les structures de marché et l'intensité concurrentielle La concurrence parfaite et imparfaite La concentration horizontale et verticale Les indicateurs de concentration d'un marché Le pouvoir de marché La contestabilité d'un marché Les effets de la concurrence sur les consommateurs et sur les producteurs La concurrence et le bien être : le surplus collectif Le paradoxe de la concurrence et la dynamique de concentration des marchés Les stratégies de différenciation Les effets de réseau Les pratiques anticoncurrentielles : ententes illicites et abus de position dominante

- **Quelles sont les réponses de l'État aux défaillances de marché et aux imperfections de la concurrence ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Expliquer les défaillances de marché dans l'allocation des ressources. ***- Analyser la capacité de l'État à remédier aux défaillances de marché.*** ***- Questionner l'efficacité de la politique de concurrence pour répondre aux imperfections de marché.***	Les externalités Les biens collectifs, les biens communs Les monopoles naturels Les asymétries d'informations La réglementation : interdictions, normes, obligations Les solutions incitatives : fiscalité, subventions, distribution de droits de propriété Les missions et instruments de la politique de la concurrence Les stratégies d'ouverture à la concurrence et de déréglementation des marchés

THÈME 3 : ORIGINE ET SOUTENABILITÉ DE LA CROISSANCE CONOMIQUE

- **D'où vient la croissance économique ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser l'origine de la croissance économique à partir de la première révolution industrielle. ***- Caractériser les facteurs de la croissance.*** ***- Distinguer les explications théoriques de la croissance.***	La croissance économique Les révolutions industrielles Le rattrapage économique Les explications conjoncturelles de la croissance du PIB Les déterminants de la croissance de long terme La productivité globale des facteurs La croissance extensive et intensive La croissance effective et la croissance potentielle Les cycles longs de la croissance : innovations et destruction-créatrice La croissance et le progrès technique Le rôle de l'État dans la croissance de long terme

- **Quelles influences du système bancaire et financier sur la croissance économique ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser la structure et le fonctionnement des systèmes financiers. ***- Analyser les modalités de financement des entreprises et de l'État.*** ***-Expliquer les effets du financement de l'économie par les banques et les marchés financiers, sur la croissance économique.***	La finance directe et la finance indirecte Les fonctions principales du système bancaire et financier Les modes de financement alternatifs La structure des marchés de capitaux : marché monétaire et marché financier (marchés dérivés exclus) La libéralisation de la finance et la financiarisation de l'économie Les risques bancaires et le cycle du crédit L'efficience des marchés financiers et la formation de bulles spéculatives Les crises financières et les modes de propagation à l'économie réelle

- **Quels sont les enjeux d'une croissance économique inclusive et durable ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les effets ambivalents de la croissance économique sur le développement économique et humain. ***- Caractériser les dimensions du développement durable.*** ***- Analyser la relation entre croissance économique et inégalités économiques.***	La croissance et le développement économique Les indicateurs de mesure du niveau de développement humain Le développement durable La soutenabilité forte et faible La croissance et la répartition des revenus Les inégalités économiques de revenus et de patrimoine contemporaines La croissance économique inclusive Les modalités de transmission des inégalités à la croissance

- **Repenser la croissance ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Expliquer les limites de la croissance économique. ***- Identifier les enjeux d'une croissance soutenable.*** ***- Analyser les modèles économiques alternatifs à la croissance économique.***	L'état stationnaire Le capital naturel, les biens premiers et les capabilités La transition écologique La croissance verte La finance responsable La décroissance L'économie sociale et solidaire, L''économie collaborative L'économie de la fonctionnalité Les limites des modèles économiques alternatifs à la croissance économique

THÈME 4 : OUVERTURE INTERNATIONALE DES ÉCONOMIES

- **Pourquoi les économies font elles le choix de s'ouvrir ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les principales évolutions contemporaines du commerce européen et mondial. ***- Expliquer le choix de l'ouverture aux échanges de biens et de services.*** ***- Justifier la régulation du commerce international.***	Les indicateurs de l'intégration commerciale des nations La structure du commerce mondial Les échanges inter branches et intra branches Les fondements du libre-échange Les EMN, les IDE et les chaînes de valeur mondiales La dynamique du marché européen L'OMC et les principes du multilatéralisme Le régionalisme

- **Quelles sont les principales controverses relatives à l'ouverture internationale des économies ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Présenter les effets de l'ouverture du commerce international sur les inégalités et l'environnement. ***- Analyser les enjeux de la globalisation financière.*** ***- Discuter des avantages et des contraintes de l'appartenance à la zone euro.***	Les inégalités internes Les effets de l'ouverture du commerce international sur : - le système productif et sur l'emploi - les effets sur le bien être - les effets de composition d'échelle et de progrès technique La globalisation financière La stabilité financière Risque systémique Les crises financières (à l'exclusion des crises de changes) La zone monétaire optimale Zone euro : avantages, modalités de gouvernance, politique monétaire unique, l'encadrement des politiques budgétaires

- **Comment l'Etat cherche-t-il à adapter son économie au contexte de l'ouverture internationale ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Présenter la nature et les effets des politiques commerciales nationales. ***- Étudier les politiques industrielles et de compétitivité nationales.*** ***- Analyser les enjeux des politiques d'attractivité du territoire.***	Les politiques tarifaires et non tarifaires Protectionnisme : justifications et effets La politique industrielle La politique de compétitivité La politique d'attractivité du territoire La politique de concurrence La stratégie européenne de compétitivité

THÈME 5 : LA RÉGULATION PUBLIQUE DES QUESTIONS ÉCONOMIQUES, SOCIALES ET ENVIRONNEMENTALES

➢ **Pourquoi mettre en œuvre des actions de régulation macroéconomique par des politiques économiques ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Distinguer les principaux déséquilibres macro-économiques. ***- Identifier les principales formes de la politique économique.*** ***- Analyser la place de l'État face à la question des biens publics globaux.***	L'inflation/déflation Le chômage Le déséquilibre extérieur Les politiques économiques : typologie, objectifs et instruments La typologie des biens publics mondiaux

➢ **Quelles régulations face aux problèmes économiques ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les fondements et les contraintes de la politique budgétaire. ***- Identifier les caractéristiques d'une fiscalité efficace dans une économie globalisée.*** ***- Analyser les fondements et les contraintes de la politique monétaire des banques centrales.*** ***- Expliquer le besoin de coopération interétatique en matière de politiques économiques.***	Les stabilisateurs automatiques de la politique budgétaire Les multiplicateurs de la politique budgétaire La soutenabilité des finances publiques La crédibilité de la politique budgétaire La fiscalité optimale, la fiscalité incitative La concurrence fiscale La coopération fiscale internationale L'indépendance des banques centrales Les politiques monétaires conventionnelles et non-conventionnelles L'efficacité du policy mix Les organes et institutions régionales et internationales

➢ **Quelles politiques face aux problèmes d'emploi et de chômage ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser les déséquilibres sur le marché du travail. ***- Expliquer les causes des déséquilibres sur le marché du travail.*** ***- Discuter l'efficacité des politiques de l'emploi*.**	Le chômage : mesure et formes L'emploi : taux d'emploi, taux d'activité La rigidité du marché du travail et des salaires Le dualisme du marché du travail Les politiques actives et passives de l'emploi Les politiques d'action sur la demande et l'offre de travail La flexibilité et sécurité sur le marché du travail

- **Quelles politiques face aux risques sociaux, aux inégalités économiques et aux défis environnementaux ?**

CAPACITÉS	NOTIONS
- Analyser la protection sociale. ***- Identifier les principales politiques sociales de lutte contre les inégalités économiques et la pauvreté.*** ***- Présenter les politiques de l'environnement.***	Les politiques de redistribution Les politiques sociales La protection sociale : logiques d'assurance, d'assistance, de protection universelle Les effets de la mondialisation sur l'environnement La politique environnementale : principes généraux et instruments de la politique environnementale

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 3
Programmes de management et sciences de gestion

1ère et 2nde années

Programme de Management et Sciences de gestion (classe ECT)

Le programme de « management et sciences de gestion » en classe préparatoire aux grandes écoles voie économie et commerciale option technologique (CPGE ECT) intègre des savoirs et démarches disciplinaires que les étudiants ont abordés au cours du cycle terminal du lycée en série Sciences et Technologies du Management et de la Gestion (STMG)[1]. Il constitue une étape d'un parcours de formation au terme duquel les étudiants prétendent à l'obtention d'un master en école de management ou à l'université. L'enseignement de « management et sciences de gestion » place délibérément les étudiants en position d'analyser des situations organisationnelles complexes ; ils sont conduits à étudier la pertinence des solutions mises en œuvre pour répondre à des problématiques de gestion repérées. Cet enseignement répond à une double exigence, de consolidation et d'approfondissement des savoirs de sciences de gestion mais également de développement de capacités de réflexion, d'analyse et d'argumentation. Dans cette perspective, le recours à des éléments théoriques permet d'éclairer et d'enrichir les analyses conduites.

Cet enseignement s'intéresse à l'entreprise à la fois comme un tout, au sens où les stratégies retenues l'engagent dans des axes de développement globaux, mais aussi comme un système complexe conduisant à réaliser des compromis selon les situations ou les parties prenantes considérées. La confrontation de différents angles d'analyse doit permettre aux étudiants de porter un regard réflexif sur les choix stratégiques et sur les enjeux, la portée, la cohérence des choix de gestion retenus au regard des spécificités du contexte d'étude.

L'enseignement de « management et sciences de gestion » en CPGE ECT intègre nécessairement les évolutions actuelles qui déterminent le cadre stratégique contingent auquel les entreprises sont confrontées et constituent des sources d'opportunités qu'elles peuvent saisir : nouvelles attentes exprimées par les parties prenantes, différentes dimensions de la performance, exigences éthiques et de développement durable, digitalisation de plus en plus avancée des activités ou encore élaboration et mise en œuvre de nouveaux modèles économiques (« business model »). L'enseignement de « management et sciences de gestion » intègre également une perspective temporelle qui s'appuie à la fois sur des éléments historiques de l'entreprise et sur la nécessité de s'adapter à des contraintes liées au temps pour assurer sa pérennité et son développement. En outre, il intègre aussi une perspective interculturelle en lien avec l'internationalisation des processus et la mondialisation de l'environnement.

C'est à l'intérieur de ce cadre d'analyse que le programme de « management et sciences de gestion » doit permettre aux étudiants de développer progressivement des capacités transversales, auxquelles chacun des thèmes contribue :

- analyser l'entreprise et ses différents processus dans leur complexité (attentes des parties prenantes, interdépendance entre les fonctions, prise en compte des facteurs de contingence, spécificité des types d'activité : BtoB, BtoC, CtoC, …) ;
- analyser les apports et les conséquences de la digitalisation de l'entreprise sur sa stratégie et sa mise en œuvre, y compris sur le plan technologique ;
- analyser les déterminants de la prise de décision des managers, les dilemmes, les arbitrages, auxquels ils sont confrontés ;

[1] Première STMG, en management ainsi qu'en sciences de gestion et numérique et, en classe de terminale STMG, en management, sciences de gestion et numérique (enseignement commun et enseignements spécifiques : gestion et finance, mercatique (marketing), ressources humaines et communication, systèmes d'information de gestion).

- étudier les enjeux, les modalités et les conséquences de la prise en compte des intérêts des différentes parties prenantes de l'entreprise, y compris sur les plans éthique et responsable ;
- intégrer les contraintes et les dynamiques temporelles à l'œuvre au sein de l'entreprise et dans son environnement ;
- appréhender l'entreprise dans une dimension internationale, globale et interculturelle;
- articuler entre elles les différentes dimensions de la performance.

Le programme ne constitue pas une progression et il ne doit pas être abordé de manière séquentielle. En effet, l'analyse de situations d'entreprise complexes nécessite la mobilisation d'éléments issus de différents thèmes. Il est donc essentiel d'envisager ce programme en valorisant les liens entre les thèmes afin de développer les capacités transversales. Il est attendu des étudiants qu'ils puissent analyser des situations d'entreprise existantes à partir de données réelles. Il est fortement suggéré d'expliciter, d'analyser les arbitrages à effectuer, les tensions à résoudre entre différents éléments de la prise de décision. Les notions à mobiliser sont évoquées comme autant de balises ou d'arguments permettant de structurer l'étude de ces situations. Le niveau analytique peut également être renforcé par le recours à des documents de nature théorique ouvrant la réflexion des étudiants sur des enjeux organisationnels auxquels les décideurs sont confrontés, ou sur des compromis à trouver.

Le programme est structuré en 6 thèmes :
Thème 1 – Analyse du contexte stratégique
Thème 2 –Système d'information et décision
Thème 3 – Organisation et coordination des activités
Thème 4 – Analyse de la performance et des équilibres financiers
Thème 5 – Mobilisation des ressources humaines
Thème 6 – Élaboration et valorisation de l'offre

Thème 1 – Analyse du contexte stratégique

Quels que soient les secteurs d'activité considérés ou leur degré de maturité, la définition et la mise en œuvre des orientations stratégiques d'une entreprise prennent appui sur l'analyse de son environnement ainsi que sur celle de ses ressources et de leur combinaison. Dans cette perspective, les étudiants doivent être capables d'étudier le cadre stratégique d'une entreprise, en relation avec ses différentes missions, finalités et objectifs, à partir des outils usuels du diagnostic stratégique. Selon la logique entrepreneuriale ou managériale sous-jacente, ils doivent être également en mesure de positionner l'entreprise au sein de son réseau de parties prenantes[2]. Les étudiants doivent être enfin en capacité d'apprécier les relations de l'entreprise avec son écosystème, c'est-à-dire l'ensemble des acteurs intervenant, à des degrés divers, dans le processus de création de valeur mis en œuvre.

L'analyse du cadre stratégique permet de justifier les stratégies définies et mises en œuvre ainsi que les choix de gestion. Dès lors, il est attendu des étudiants qu'ils soient en mesure d'apprécier la pertinence des décisions stratégiques prises au niveau global (ou niveau « corporate ») et par domaine d'activités stratégiques (ou niveau « business ») et, quand cela est possible, celle de leurs évolutions successives. Pour ce faire, ils pourront, à titre d'exemples, s'intéresser à la capacité de l'entreprise à atteindre un niveau de performance (globale) suffisant pour assurer sa pérennité et son développement, à transformer les ressources et les compétences détenues en offre dont la valeur peut être perçue comme supérieure à celle de ses concurrents, à obtenir des avantages concurrentiels soutenables et durables, etc.

L'approche par les modèles économiques (ou « business models ») traduit la logique globale par laquelle une entreprise crée et capte de la valeur, en identifiant les différentes sources possibles de performance permettant d'assurer une meilleure prise en charge de la complexité de l'environnement. Elle constitue à la fois un outil de compréhension du fonctionnement d'une entreprise et un outil de créativité en produisant de nouvelles idées génératrices de valeur concernant l'offre, l'organisation de l'entreprise, les modalités de gestion de sa chaîne de valeur ou son insertion dans l'environnement. Dans cette perspective, les étudiants doivent être en mesure d'apprécier, dans le temps, la cohérence entre les choix stratégiques retenus et le modèle économique, classique ou innovant, implicitement ou explicitement, mis en œuvre.

Ce thème est organisé autour de quatre capacités, articulées selon un niveau de difficulté croissant d'analyse et d'argumentation. Il permet d'envisager l'étude du contexte et des choix stratégiques à partir de plusieurs entrées : l'étude des opportunités et des menaces de l'environnement, l'étude des ressources et des compétences détenues ou à développer, les décisions de nature stratégiques, la définition et la mise en œuvre du modèle économique de l'entreprise. Il est attendu des étudiants qu'ils puissent analyser la cohérence entre les décisions de niveau stratégique et toutes les autres décisions.

Capacités	Notions
Repérer les éléments de base d'analyse du cadre stratégique de l'entreprise	Finalités, missions, objectifs, responsabilité sociétale de l'entreprise Domaines d'activités stratégiques Ressources, compétences Chaîne de valeur, création de valeur, captation de valeur

[2] Selon l'approche développée par Freeman.

	Macro-environnement / Micro-environnement Parties prenantes Logique entrepreneuriale et logique managériale
Évaluer la place et le potentiel de développement de l'entreprise sur son/ses marché(s)	Potentiel stratégique des ressources et compétences Position concurrentielle Facteurs clés de succès (FCS) Avantage(s) concurrentiel(s) Synergies Portefeuille d'activités stratégiques
Analyser la dynamique et la pertinence des choix stratégiques des entreprises	Stratégie globale (spécialisation, diversification, recentrage) Stratégie de domaine (stratégie de domination, de différenciation et de focalisation) Stratégie d'internationalisation Modalités de développement et d'internationalisation (croissance interne, croissance externe, croissance conjointe, etc.) Frontières de l'entreprise (intégration, externalisation) et écosystèmes d'affaires Innovation
Analyser la cohérence du modèle économique avec les orientations stratégiques de l'entreprise	Caractéristiques d'un modèle économique (*par exemple l'offre faite aux clients, les clients, l'organisation interne, la structure des coûts, les sources de revenus*) Modèles économiques (traditionnel, low-cost, freemium, plateforme, …)

Thème 2 –Système d'information et décision

Compte tenu de l'évolution et de l'instabilité de l'environnement, l'entreprise doit développer des capacités d'adaptation. Elle devient alors ouverte, intégrée à son écosystème et collabore avec ses partenaires pour structurer sa chaîne de valeur et se transformer. Pour cela, elle a besoin d'informations afin d'améliorer la connaissance de son environnement. Dans ce contexte, la numérisation[3] peut constituer un levier de reconfiguration des processus. Elle contribue à faciliter la communication, à améliorer la coordination, à diffuser la connaissance. Les étudiants doivent être capables d'analyser le rôle des informations pour une entreprise et de présenter les différentes fonctionnalités d'un système d'information (collecte, stockage, analyse et diffusion des informations), d'en repérer les différentes composantes, d'identifier sa contribution au fonctionnement de l'entreprise. Ils doivent également être en capacité de distinguer et d'analyser les différents processus mis en œuvre et, plus généralement, la façon avec laquelle le système d'information (SI) structure l'organisation de l'entreprise et prend en charge la diffusion ainsi que le partage des informations entre les acteurs.

Les informations participent également au processus de prise de décision. Elles le facilitent ou l'enrichissent en même temps que leur nombre, en constante augmentation, est susceptible de le complexifier. C'est dans ce cadre que les étudiants doivent être capables d'analyser les enjeux de la décision, notamment en termes de rationalité, de risque ou encore d'automatisation de la décision.

Si la digitalisation des processus favorise un fonctionnement cohérent de l'organisation, affecte la culture d'entreprise et facilite la prise de décision, elle reste soumise à des contraintes et peut être une source de vulnérabilités devant être prises en compte. Les étudiants doivent mettre en évidence les opportunités et les risques associés.

Le système d'information et les décisions stratégiques sont liés. Les étudiants doivent être en mesure d'analyser ces interactions notamment en termes d'alignement stratégique, de gouvernance ou encore de besoins en information, de mise en œuvre des procédures de contrôle et d'évaluation. Ils doivent également être capables d'analyser comment le système d'information devient fondement d'innovations organisationnelles et comment la digitalisation de l'entreprise peut transformer la chaine de valeur, l'expérience client et les pratiques de fidélisation tout en modifiant à la fois les compétences, les métiers et les parcours professionnels.

L'étude du système d'information permet de présenter la grande diversité de ses usages. Les services rendus par le système d'information aux différents métiers de l'entreprise sont étudiés (par exemple : système d'information marketing, système d'information des ressources humaines, système d'information comptable) en mobilisant les autres thèmes du programme.

Capacités	Notions
Présenter les composantes du système d'information	Données, informations, qualités de l'information Source des données, réseaux sociaux Sources d'informations, traces numériques Système d'information / système informatique Dimensions humaine, technologique et organisationnelle Base de données, droits d'accès Modélisation d'un processus organisationnel *(indications complémentaires : il est recommandé d'utiliser le modèle*

[3] Le terme numérique se rapporte ici à la fois aux technologies et aux processus qui les mobilisent.

	évènement résultats avec acteur et le schéma de processus). Progiciel de gestion intégré / Workflow
Présenter les rôles du système d'information	Coordination / Outils collaboratifs (Réseau social d'entreprise…) Veille, Mémorisation / Intelligence collective Communication interne et externe Régulation / Contrôle / Indicateurs / Tableaux de bord Aide à la décision Gestion des connaissances / Communautés de pratiques
Présenter les enjeux de la prise de décision	Décision / types de décision Processus de décision et contraintes Rationalité, biais cognitifs Risque / incertitude Intelligence artificielle / Intelligence décisionnelle Big Data Intérêt et attentes des parties prenantes
Présenter les enjeux de la digitalisation des processus	Digitalisation des processus Risques informatiques / risques pour les individus Sécurité du système d'information Cybersécurité Utilisation et protection des données personnelles et stratégiques / RGPD Transformation humaine et culturelle (nature des emplois, appropriation des outils, freins culturels, …)
Analyser les interactions entre le système d'information et l'action stratégique	Gouvernance des systèmes d'information Alignement stratégique

Thème 3 – Organisation et coordination des activités

Au regard des attentes, de l'incertitude et de l'instabilité croissantes de l'environnement, l'organisation, la coordination et le contrôle des activités contribuent directement à la performance des entreprises tout en étant un élément clé du développement de nouveaux modèles économiques. Les étudiants doivent être en capacité d'analyser la relation d'influence réciproque entre structure et stratégie.

En outre, la coordination des processus internes à l'organisation ou impliquant des partenaires répond à des exigences multiples dont la prise en compte simultanée renforce la capacité concurrentielle des entreprises en même temps qu'elle permet de satisfaire les intérêts des différentes parties prenantes. Il s'agit, tout à la fois, de maîtriser les coûts (coûts d'approvisionnement, coût de production, etc), d'assurer un niveau élevé de qualité de produit et de service ainsi que de satisfaction des clients (renouvellement de l'offre, délai de mise sur le marché, délai de livraison, etc), d'adapter la production ou encore de respecter les principes du développement durable (traçabilité, recyclage, etc). Dans un contexte où les technologies actuelles permettent d'optimiser et d'automatiser les processus, les étudiants doivent être capables d'analyser les enjeux et les modalités de l'organisation des activités requises pour amener au consommateur un produit ou un service depuis sa conception jusqu'à sa distribution.

Dans ce cadre, les étudiants doivent être en capacité, pour chacun des acteurs sollicités (producteurs, sous-traitants, prestataires, distributeurs, etc) d'analyser la valeur ainsi créée en comparant la satisfaction des utilisateurs vis-à-vis du produit ou du service avec les coûts engagés pour mettre en place les ressources qui assurent cette satisfaction. Dans une logique de contrôle et pour favoriser la prise de décision, les étudiants doivent également être en mesure d'analyser les écarts entre les coûts prévisionnels et les coûts réalisés. De manière générale, ils doivent être capables de mesurer le risque d'exploitation d'une entreprise en fonction des spécificités et de l'évolution de son cadre stratégique.

Capacités	Notions
Caractériser la structure de l'entreprise et étudier sa pertinence	Modes et degrés de spécialisation Centralisation / décentralisation Formalisation Mécanismes de coordination Nouvelles formes structurelles : organisation par processus, structure par projet, structure en réseau *(indications complémentaires : seules les composantes de la structure sont présentées sans entrer dans le détail des différentes configurations structurelles*).
Analyser l'organisation de la chaîne de valeur et ses enjeux	Activités principales / activités de soutien Processus de production Gestion de la chaîne logistique Externalisation / intégration / entreprise étendue Coopération / coopétition Productivité / flexibilité Efficience / efficacité
Analyser la valeur et contrôler le processus de création de valeur	Arbitrage coût / qualité / délai Lean management Structure de coût (fixes / variables, directs / indirects, moyen / marginal) Calcul de coûts partiels

	Calcul des coûts complets à partir des méthodes des centres d'analyse et à base d'activités *(indications complémentaires : la prise en compte des prestations croisées ainsi que la valorisation des stocks sont exclues du calcul des coûts complets).* Calcul des coûts spécifiques Contrôle des coûts et calcul des écarts de coût prévisionnel / réalisé *(indications complémentaires : la décomposition des écarts se limite aux écarts sur prix et écarts sur quantité)*
Évaluer le risque d'exploitation (ou opérationnel)	Seuil de rentabilité Marge et indice de sécurité Levier d'exploitation

Thème 4 – Analyse de la performance et des équilibres financiers

La turbulence de l'environnement rend fondamentaux le rôle et les qualités de l'information et notamment de l'information comptable et financière, qui favorise l'efficience du système de gestion de l'entreprise et la prise de décision. Les étudiants doivent alors être capables d'identifier et analyser avec pertinence l'information permettant de justifier, étayer et rationaliser les décisions prises dans le contexte proposé.

La gestion de l'entreprise doit aussi prendre en compte les attentes des différentes parties prenantes, qui requièrent des informations afin d'apporter un éclairage en matière de décision, en matière d'investissement (prêteurs/actionnaires), d'achat/vente (clients/fournisseurs), ou encore pour améliorer son attractivité (collaborateurs). Pour mieux les satisfaire et les fidéliser, l'entreprise se doit de répartir sa valeur ajoutée entre ces différentes parties prenantes. Dès lors, de nombreux enjeux et compromis apparaissent. Les étudiants doivent alors être capables d'évaluer cette répartition, de mesurer la performance de l'entreprise et de justifier les choix effectués.

La gestion financière a notamment pour objet l'étude des ressources financières et de leur emploi. Aussi, l'enjeu pour l'entreprise tient dans la mesure de la nature du risque lié à l'équilibre financier et à sa capacité à faire face à ses échéances. Dans ce cadre, les étudiants doivent être capables d'analyser le compte de résultat et le bilan en cohérence avec le contexte, grâce à des indicateurs et ratios pertinents et d'examiner l'évolution de l'activité et des performances réalisées, y compris par des comparaisons avec celles du secteur.

Les informations comptables et financières apportent un éclairage nécessaire en matière de décisions d'investissement et de financement. Cet éclairage est d'autant plus fondamental qu'il existe des biais informationnels entre les emprunteurs et les prêteurs, des risques financiers émanant, soit de la gestion de l'entreprise, soit de l'environnement. Les étudiants devront donc être capables d'analyser des décisions en matière d'investissement ou de financement et de justifier ces choix au regard du contexte stratégique proposé.

Capacités	Notions
Repérer les éléments d'information comptable	Système d'information comptable Documents de synthèse (*indications complémentaires : limiter au bilan et compte de résultat*) Communication financière
Analyser la performance économique et la rentabilité	Indicateurs de performance liés à l'activité : soldes intermédiaires de gestion (SIG), capacité d'autofinancement (CAF), ratios Rentabilité économique et rentabilité financière Analyse de la répartition de la valeur ajoutée
Analyser les équilibres financiers	Bilan fonctionnel (*indications complémentaires : l'étude du tableau de financement est exclue*) FRNG, BFRE et BFRHE et Trésorerie nette Ratios de structure et de rotation (*indications complémentaires : les formules de calcul des ratios sont fournies)* Déterminants de la variation de la trésorerie (*indications complémentaires : le calcul de l'ETE et son analyse sont exclus)*

Analyser les choix d'investissement	Choix d'investissement Flux nets de trésorerie (*indications complémentaires : le calcul des FNT peut être demandé*) Rentabilité économique d'un investissement (VAN, TRI, DRCI) (*indications complémentaires : les calculs du TRI et du DRCI sont uniquement effectués par la méthode de l'interpolation linéaire avec bornes*) Taux d'actualisation (*indications complémentaires : on analysera ses déterminants et ses conséquences*)
Analyser les choix de financement	Moyens de financement de l'entreprise *(indications complémentaires : l'étude des nouveaux moyens de financement est intégrée*) Choix de financement Effet de levier

Thème 5 – Mobilisation des ressources humaines

La gestion des ressources humaines permet non seulement la mise en œuvre des choix stratégiques mais en détermine également la faisabilité voire l'émergence. Elle joue un rôle central dans la mise à disposition et le développement de ressources humaines, la construction d'actions collectives, la coordination mais aussi dans la mise en œuvre de la responsabilité sociétale des entreprises ou la construction de la marque employeur. À ce titre, les étudiants doivent être capables d'en identifier les enjeux comme condition essentielle de la compétitivité et de la pérennité des entreprises.

La gestion des ressources humaines cherche à attirer, à valoriser, à développer et à fidéliser les compétences dans un contexte stratégique, organisationnel, réglementaire et technologique évolutif. Les nouvelles formes d'emploi, les évolutions en matière de formation professionnelle, les problématiques actuelles autour de la diversité, de l'inclusion ou du télétravail figurent parmi les enjeux essentiels à prendre en compte. Sur la base d'un diagnostic mobilisant le calcul et le choix d'indicateurs pertinents, les étudiants doivent être en mesure d'analyser les leviers d'action disponibles pour favoriser l'adéquation entre ressources et besoins.

La mobilisation des ressources humaines conduit à agir non seulement sur l'individu mais également sur le collectif. Les étudiants doivent être capables d'analyser la pertinence et la cohérence des dispositifs destinés à susciter la motivation et l'engagement des individus au travail et d'en mesurer les effets (performance, bien-être, mais aussi développement des risques psychosociaux). L'étude de la dimension collective doit leur permettre d'évaluer l'importance du climat social, des compromis à réaliser et d'envisager les moyens d'action possibles pour fédérer les acteurs.

La digitalisation des processus, abordée dans le thème 2 du programme, a non seulement des conséquences sur la nature du travail, mais concerne également spécifiquement la fonction ressources humaines. Les étudiants doivent pouvoir décrire les modalités de la digitalisation de l'activité et de la fonction RH et en analyser les conséquences, tant sur l'individu que sur l'organisation.

Les dispositifs mis en œuvre pour mobiliser les ressources humaines et les outils et modes d'action qui les accompagnent posent enfin des questions éthiques dont les étudiants doivent prendre conscience.

Il est attendu des étudiants qu'ils soient en mesure de mettre en évidence l'interdépendance entre la fonction ressources humaines et les autres domaines du management, en particulier la stratégie, la structure de coût, le système d'information (apports et conséquences des Big Data et de l'intelligence artificielle, des progiciels de gestion intégrés…) ou encore l'analyse de la performance économique (productivité du travail, masse salariale…). La mise en évidence des transversalités avec l'enseignement de droit est également souhaitable.

Capacités	Notions
Présenter les enjeux stratégiques de la gestion des ressources humaines (GRH).	Responsabilité sociétale des entreprises Culture d'entreprise Marque employeur, marketing RH Compétences (valorisation, développement)
Construire et interpréter les éléments d'un diagnostic RH	Indicateurs RH Bilan social, tableau de bord social Masse salariale et déterminants de son évolution *(Indications complémentaires : les calculs liés à la*

	masse salariale restent élémentaires et excluent le traitement des effets de structure, d'effectif…) Climat social Risques psychosociaux (stress, burnout, harcèlement…)
Repérer et analyser les leviers d'actions pour favoriser l'adéquation entre besoins et ressources humaines	Gestion prévisionnelle des emplois et des compétences (GPEC) Modes de recrutement Diversité, inclusion Intégration Formation professionnelle (enjeux, obligations) Employabilité Mobilité professionnelle, gestion des carrières Nouvelles formes d'emploi / ubérisation *(Indications complémentaires : la conception et l'étude d'outils tels que les profils de poste sont donc exclues).*
Analyser les outils de GRH pour agir sur l'individu au travail	Motivation, satisfaction, bien-être, engagement organisationnel Fidélisation, expérience collaborateur Politique de rémunération Conditions de travail Promotion Enjeux de l'évaluation « empowerment »
Analyser les moyens d'agir sur le collectif	Styles de management Dialogue social, négociation collective, gestion des conflits Communication interne / gestion du changement Management interculturel
Analyser la digitalisation de l'activité et de la gestion des ressources humaines ainsi que leurs conséquences	Réorganisation des processus e-learning, e-recrutement Travail coopératif (et ses dispositifs numériques) Action collective, communauté de pratiques, coordination Télétravail SIRH

Thème 6 – Élaboration et valorisation de l’offre

L’analyse du marché porte sur l’offre (produits, offreurs, réseaux de distribution…) et la demande. Elle est essentielle pour permettre à l’entreprise de développer une proposition adaptée aux évolutions du marché et de créer de la valeur. Elle s’appuie sur des résultats d’études, qu’il s’agit d’interpréter, de synthétiser et de relier à une problématique managériale.

La multiplication des applications Internet et mobiles connectées et la collecte massive des données (Big Data) créent et installent de nouveaux comportements et usages chez les clients, que cela soit en BtoB, BtoC, CtoC. Dans ce contexte, également marqué par l’affirmation d’un consommateur multifacettes, à la fois émotionnel et rationnel, les étudiants doivent être en mesure d’analyser la demande, dans ses aspects quantitatifs (structure, évolution, prévision) et qualitatifs (besoins, motivations, freins, attitudes, processus d’achat…).

Les entreprises, tout à la fois, s’adaptent à ces nouveaux comportements, les initient ou les renforcent, modifient en profondeur, en cohérence avec les orientations stratégiques retenues et leur modèle économique, le rapport qu’elles entretiennent avec leurs clients. Cela renvoie tout d’abord à la façon avec laquelle elles définissent, communiquent ou commercialisent leur offre (personnalisation, expérience client, commerce phygital, …). Cela concerne ensuite la place et le rôle que les clients occupent dans l’élaboration de cette offre (réseaux sociaux, « empowerment », co-production). Dans un contexte d’affirmation et de développement d’un marketing à la fois relationnel, collaboratif, expérientiel et communautaire, marqué par une logique basée fondée non plus seulement sur le service au client mais sur la solution apportée (« Service dominant logic, co-création»), les étudiants doivent être capables de distinguer et de comprendre le lien entre le marketing stratégique (segmentation / ciblage / positionnement) et le marketing opérationnel (le plan de marchéage) ainsi que la pertinence et la cohérence des choix retenus pour chaque variable du mix (produit, prix, communication et distribution).

Enfin, les évolutions du comportement des clients d’une part, de l’élaboration et de la valorisation de l’offre d’autre part, conduisent à penser différemment la performance commerciale autour des notions de satisfaction, de confiance, de fidélité, d’attachement et d’engagement. Les étudiants doivent être en capacité de présenter les (nouveaux) enjeux de la gestion de la relation client et ses modalités de mise en œuvre sur les plans humain (rôle des vendeurs) et technologique (système d’information marketing, analyse des données, …).

Il est attendu des étudiants qu’ils soient en mesure de situer la position et le rôle des activités commerciales au sein de la chaîne de valeur, d’apprécier sa contribution à la création de valeur ou d’analyser la cohérence du marketing stratégique et du marketing mix avec la stratégie de domaine et le modèle économique de l’entreprise. Ils doivent également être capables d’identifier, sur le plan des ressources humaines, la nécessaire évolution des compétences des équipes commerciales pour accompagner la digitalisation de la relation client ainsi que le rôle et la contribution du système d’information marketing (SIM) dans sa mise en œuvre. Les étudiants doivent pouvoir mesurer la performance des actions marketing menées au regard d’indicateurs pertinents, synthétisés dans des tableaux de bord stratégiques ou opérationnels.

Capacités	Notions
Analyser le comportement des clients sur les plans quantitatif et qualitatif	Caractéristiques du marché, segments de clientèle Clients / utilisateurs / prescripteurs Prospects Demande effective / demande potentielle Demande dérivée (B to B to C) Étude de marché Prévision / saisonnalité des ventes Déterminants du comportement des clients
Caractériser les éléments du marketing stratégique	Stratégie(s) de segmentation du marché– ciblage (marketing de masse, indifférencié, différencié, concentré, individualisé) Positionnement (attributs déterminants, différenciants et saillants) Positionnement voulu / perçu / vécu
Analyser les différentes composantes de la politique de produit	Offre globale Cycle de vie Gamme Normes et labels Marque Conditionnement Expérience d'achat on et off-line
Étudier les objectifs et la complexité de la politique de prix	Déterminants de la fixation du prix : coûts, demande, concurrence Sensibilité au prix Politiques d'écrémage, de pénétration, d'alignement Modulation(s) du prix, Yield management Modèle(s) de gratuité
Analyser et évaluer la politique de communication commerciale	Cible(s), objectif(s), message(s) Communication media, hors-media Typologie de medias (paid, owned, earned) Indicateurs d'efficacité : audience (totale, utile), coût, rentabilité,….
Analyser la spécificité et la cohérence de la politique de distribution des producteurs et/ou des distributeurs	Type de canal (canal direct, court, long) Type de distribution (intégrée, intensive, sélective, exclusive) Forme du réseau (intégré, associé, mixte) Formats de vente Distribution multi-canal, cross-canal, omni-canal Dépendance / coopération producteurs et distributeurs
Présenter les enjeux de la gestion de la relation – client (GRC)	Analyse des données (datamining, marketing prédictif) Digitalisation de la relation client Satisfaction, confiance, fidélité, engagement, attachement Attrition, fidélisation, valeur à vie d'un client Rôle(s) du vendeur

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 4
Programme de lettres et philosophie

1ère et 2nde années

CPGE économiques et commerciales
Programme « Lettres et Philosophie »

Objectifs de formation

Commun à l'ensemble des classes préparatoires économiques et commerciales, cet enseignement, qui implique à part égale les Lettres et la Philosophie, est partie constituante de la formation générale des étudiants.
Sa finalité est de former les élèves à une réflexion autonome et éclairée, par la lecture ample et directe d'œuvres de littérature et de philosophie, par l'étude des arts et des techniques, et par la pratique régulière de travaux écrits et oraux. Les étudiants développent ainsi leurs capacités à s'interroger, à conduire une pensée cohérente et à tirer profit avec finesse et pertinence de leurs connaissances.

L'enseignement « Lettres et Philosophie » a trois objectifs majeurs :

1. il permet aux élèves d'enrichir leur culture et de mieux comprendre le monde dans lequel ils vivent ;
2. il les entraîne à développer leur réflexion personnelle, ainsi qu'à aiguiser leur sens critique ;
3. il vise à développer la maîtrise de l'expression écrite et orale ainsi que l'aptitude à communiquer, compétences indispensables pour la future vie professionnelle des étudiants.

Les exercices écrits sont pris en charge collégialement par les deux professeurs de Lettres et de Philosophie.

Programme

Chaque professeur détermine librement et en pleine responsabilité, selon les parcours intellectuels et les choix pédagogiques qui répondent aux besoins des élèves, les œuvres philosophiques, littéraires ou relevant de l'ensemble des arts, dont il juge l'étude nécessaire à son enseignement. Les deux professeurs, de Lettres et de Philosophie, s'accordent pour assurer la cohérence d'ensemble de l'enseignement dispensé.

Première année

Le programme permet d'élargir et d'enrichir les connaissances acquises au cours des études secondaires, et de consolider la culture nécessaire à une réflexion personnelle. Il s'inscrit dans la continuité des enseignements de tronc commun, Lettres ou Philosophie, mais également d'un enseignement de spécialité comme « Humanités, Littérature et Philosophie ».
L'enseignement tient compte des relations qui unissent les notions ou les concepts à leur histoire, aux contextes et résonances à travers lesquels se sont précisés leur usage et leur

sens. On rapporte ainsi l'étude des œuvres littéraires, artistiques ou philosophiques aux représentations mythologiques, religieuses, esthétiques, ainsi qu'à l'histoire des sciences, des arts et des techniques.

Ce programme est constitué des rubriques suivantes :

- l'héritage de la pensée grecque et latine ;
- les apports du judaïsme, du christianisme et de l'islam à la pensée occidentale ;
- les étapes de la constitution des sciences exactes et des sciences de l'homme ;
- l'essor technologique, l'idée de progrès ;
- la société, le droit et l'Etat modernes ;
- les figures du moi et la question du sujet depuis la Renaissance ;
- l'esprit des Lumières et leur destin ;
- quelques grands courants artistiques et esthétiques depuis la Renaissance ;
- les principaux courants de pensée contemporains.

Les rubriques sont abordées selon un parcours que les professeurs de Lettres et de Philosophie déterminent ensemble, en fonction de regroupements et de problématiques dont ils ont l'initiative et la responsabilité.

Seconde année

Etude d'un thème renouvelé chaque année par arrêté conjoint du ministre chargé de l'éducation et du ministre chargé de l'enseignement supérieur.

Pour le concours 2025, le thème est "L'image" (Arrêté du 28-06-2024) sur Bulletin Officiel du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche - BO du 18-07-2024).

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique
ECT

Annexe 5
Programmes de langues vivantes étrangères

1ère et 2nde années

Objectifs de formation

L'enseignement des langues vivantes en classes préparatoires économiques et commerciales constitue un volet essentiel de la formation générale. La raison en est claire : les carrières auxquelles se destinent les étudiants des écoles de management ont une dimension internationale et interculturelle.

Dans cette perspective, l'enseignement obligatoire de deux langues vivantes est proposé aux étudiants afin qu'ils acquièrent les compétences linguistiques et les connaissances culturelles nécessaires à leur insertion professionnelle et à leur ouverture au monde.

Les niveaux de compétences ciblés en fin de 2de année sont C1 pour la LVA, notamment dans les compétences de réception, et B2-C1 pour la LVB.

L'étude des langues vivantes, dans toutes les classes préparatoires économiques et commerciales, a comme objectifs :

- de consolider et d'approfondir les compétences de l'enseignement du second degré, dans le prolongement des enseignements du cycle terminal (en tronc commun et, le cas échéant, en enseignement de spécialité LLCER), sur le plan linguistique et culturel ;
- de faire travailler la langue en contexte sur la base de supports variés ;
- de faire acquérir aux étudiants un niveau plus élevé de compréhension et d'expression, tant à l'écrit qu'à l'oral ; le développement des compétences orales et oratoires en langue étrangère – prise de parole en continu et en interaction – fait l'objet d'une attention particulière et d'un entraînement régulier ;
- d'assurer la mise en place des repères culturels indispensables à la connaissance de la civilisation et de la culture des pays concernés, de façon à éclairer les réalités économiques, sociales et politiques du monde contemporain ; on proposera, le cas échéant, des thématiques croisées avec d'autres disciplines ;
- d'apprendre à utiliser des ouvrages et des outils de référence, d'approfondir les compétences acquises précédemment pour rechercher, sélectionner et exploiter des documents. Les ressources et outils numériques sont utilisés avec profit ;
- d'entraîner à la traduction de textes variés, à la compréhension fine de documents, et à différents types de production écrite.

Organisation des enseignements

Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures. Il aura une fonction bien particulière, dont l'objectif essentiel est la prise en charge individualisée et l'homogénéisation du niveau des étudiants, en tenant compte, pour le compenser le cas échéant, de leur historique de formation dans chacune des deux langues étudiées.

Pour cela, les premiers mois devront être axés sur :
- un travail de la langue et sur la langue en contexte ;
- l'accès progressif à une compréhension fine, à l'écrit comme à l'oral ;
- l'acquisition d'une expression maîtrisée et adéquate ;
- l'acquisition d'une méthode adaptée aux différents savoir-faire visés.

Dans le cadre de la liberté pédagogique, le professeur choisit ses méthodes et sa progression. Il organise son enseignement en suivant deux principes directeurs :

a) le professeur choisit le contexte, les problématiques et les méthodes qui favorisent les apprentissages et diversifie les modes d'acquisition des savoirs et des compétences. Il explicite pour les élèves les objectifs poursuivis, les méthodes utilisées et les critères d'évaluation ;

b) le professeur privilégie la mise en activité des étudiants : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Ils sont amenés à manipuler la langue, les notions et les concepts en exerçant leur esprit critique. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants.

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **littéraire**

Voie : **B/L**

Objectifs de formation

Première et seconde années

Objectifs de formation des première et seconde années des classes préparatoires de lettres et sciences sociales (B/L)

Situées entre la classe terminale des lycées et l'entrée dans les écoles normales supérieures (ENS), d'autres grandes écoles ou les universités, les classes de lettres et sciences sociales de première et seconde années constituent un parcours de haut niveau et s'inscrivent dans le cadre de l'architecture européenne des études au sein de celles qui conduisent à la licence.
En conformité avec le principe d'interdisciplinarité qui caractérise la formation en classe de lettres et sciences sociales première année, les enseignements dans chaque discipline dispensent une formation générale qui ne préjuge pas des parcours ultérieurs des étudiants. Les compétences acquises au cours des études dans les classes de lettres et sciences sociales de première et seconde années leur permettent en effet de se porter candidats à l'entrée dans de nombreuses grandes écoles et formations d'enseignement supérieur.
La formation dispensée s'enracine dans des connaissances, appelant nécessairement la définition de contenus. Ils sont déterminés par les programmes du concours d'admission à l'Ecole normale supérieure, groupe Sciences sociales (B/L) de la section des Lettres.

Le premier semestre

La découverte par les étudiants des exigences de haut niveau qui sont celles des classes préparatoires, tant pour ce qui est des connaissances et des capacités à acquérir que des attitudes à adopter, fait du premier semestre de la classe de lettres première année, à savoir les 18 à 20 semaines entre la rentrée début septembre et la fin du mois de janvier, une période cruciale à traiter avec un soin particulier. Alors que les classes accueillent des étudiants aux parcours antérieurs diversifiés, parcours qui leur ont permis d'atteindre des niveaux de connaissances et de compétences variés, le premier semestre a pour fonction d'assurer une transition efficace entre l'enseignement scolaire et l'enseignement supérieur, d'éclairer les choix à venir en termes d'orientation, d'engager l'étudiant dans un rythme de travail plus soutenu et d'assurer la cohésion de chaque division. Á ces fins, le premier semestre doit assurer les mises à niveau nécessaires et permettre d'acquérir les méthodes de travail et d'organisation ainsi que les capacités d'initiative indispensables aux études supérieures. Il se traduit par un suivi personnalisé des étudiants qui doivent se sentir accompagnés et soutenus par l'équipe pédagogique : l'information sur les parcours de formation et les perspectives qu'ils ouvrent les aide à donner un sens concret aux études dans lesquelles ils s'engagent et renforce leur motivation ; la mise en évidence des relations culturelles, intellectuelles et méthodologiques entre les disciplines, et l'initiation aux démarches de documentation et de recherche contribuent à les faire entrer dans une dynamique de formation ; l'attention portée à leurs éventuelles difficultés et à leurs progrès permet d'accompagner aux mieux leur effort et de leur donner confiance en eux-mêmes. Pour assurer cet accompagnement individualisé, les heures d'interrogations orales peuvent également être mises à profit et faire l'objet, en tant que de besoin, d'une répartition appropriée.
C'est à ces conditions que les étudiants pourront s'engager dans un parcours de réussite et exprimer leur véritable potentiel, qui peut se révéler, dès la fin du premier semestre, assez sensiblement différent de celui qui a été mesuré à l'issue des études secondaires.

Les objectifs de la formation

Les programmes des ENS sont traités sur les deux années sans distinction de ce qui doit être traité en première et en deuxième année. Chaque professeur établit en fonction de ses choix pédagogiques une progression annuelle organisée en deux semestres. Il y a deux grands objectifs de formation :
- Préparer les étudiants aux concours des Grandes Écoles recrutant directement sur le programme de la filière : ENS Ulm, ENS Cachan, ENS Lyon, ENSAE, ENSAI, Écoles de la BCE, Écoles du groupe ÉCRICOME, ENSIM, Ismapp ;
- Donner aux étudiants une formation pluridisciplinaire de haut niveau associant les mathématiques, les Sciences sociales, l'histoire contemporaine, la littérature, la philosophie, une langue vivante et une discipline optionnelle (langue ancienne, géographie ou LV2). Le but recherché est de former des étudiants généralistes, possédant une solide culture littéraire et historique et maîtrisant, d'une part, la rigueur du raisonnement et les outils mathématiques, et d'autre part, les méthodes d'analyse propres aux Sciences économiques et sociales. Cela de manière à être capable d'analyser, de comprendre et de mettre en perspective les problèmes contemporains, en combinant les différentes grilles de lecture et méthodes d'analyse de chacune de ces disciplines.

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :
- Pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative, l'esprit critique et l'autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes favorise cette mise en activité ;
- Didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective avec les autres disciplines est régulièrement sollicitée.

Les objectifs et programmes par disciplines

Français

Objectifs

- Construction d'une culture littéraire fondamentale en se fondant sur les grandes œuvres ;
- Étude des trois grands genres (poésie, théâtre, roman) ;
- Maîtrise des exercices de dissertation (écrit) et d'explication de texte (oral).

Programme

Les épreuves écrites (composition française) et orales (explication d'un texte français) ne comportent pas de programme.

Philosophie

Objectifs

- Acquisition d'une culture philosophique initiale par une lecture des grands textes classiques organisée autour d'un lieu fondamental de la réflexion philosophique ;
- Maîtrise des exercices de dissertation et d'explication de textes.

Programme

Programme de philosophie du baccalauréat.

Histoire

Objectifs

- Acquisition d'une solide culture historique et des méthodes de dissertation et d'oral.

Programme

- La France, de 1870 au début des années 1990 ;
- Le monde de 1918 au début des années 1990 : relations internationales, grandes évolutions économiques, sociales, politiques et culturelles.

L'approche de la deuxième partie du programme est globale : les sujets proposés à la réflexion des candidats, tant à l'écrit qu'à l'oral, leur laisseront la liberté du choix de leurs exemples. Aucun sujet ne portera exclusivement sur un pays pris isolément.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **littéraire**

Voie : **B/L**

Mathématiques

Première et seconde années

Classe préparatoire B/L
Programme de mathématiques

Table des matières

Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important dans la société et ont une importance grandissante dans les sciences humaines et sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif de ce programme est de permettre de manière équilibrée

- une formation par les mathématiques en tant que telles ;
- l'acquisition d'outils utiles notamment aux sciences sociales et à l'économie (probabilités et statistiques, introduction aux fonctions de deux variables par exemple).

L'objectif de la formation dans les classes préparatoires B/L n'est pas de former des professionnels des mathématiques. L'enseignement de mathématiques concourt à structurer la pensée des étudiants, à développer leurs capacités d'imagination et d'abstraction, et à les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...). Il permet aux étudiants d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel. L'état de l'art en sciences sociales et économie a été un guide important pour donner aux étudiants de B/L les bases dont ils auront besoin pour aller plus loin.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement de ces classes et décrit les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Il précise également certains points de terminologie et certaines notations. Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

1 - Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires B/L permet de développer chez les étudiants les compétences générales suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes notamment issus de problèmes de sciences sociales ou économiques) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

2 - Architecture des programmes

Par rapport au programme précédent, le programme d'algèbre linéaire donne une place plus importante aux aspects matriciels et introduit des bases de géométrie euclidienne qui pourront être illustrées par d'autres parties du programme. Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. À titre d'exemple, l'algèbre linéaire trouvera ainsi son application dans les problèmes d'optimisation, l'analyse et les probabilités dans les problèmes d'estimation.

Le programme a été rédigé sur deux années. Au sein de chaque année, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement. Le programme tient compte de l'évolution des programmes de Terminale tout en maintenant une exigence intellectuelle élevée adaptée aux étudiants de la filière B/L et à la place que prennent aujourd'hui les techniques quantitatives en sciences humaines et sociales.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus et des exemples d'activités ou d'applications.

Généralités

Concernant cette partie, le vocabulaire doit être connu et un savoir-faire est attendu. Aucune difficulté théorique ne sera soulevée. Certaines des notions peuvent être introduites en situation sans faire l'objet de chapitres spécifiques.

1 - Logique

Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée. Quantificateurs $\exists, \forall$.	Négation d'une phrase mathématique utilisant connecteurs et quantificateurs.
Raisonnement par l'absurde. Notion de condition nécessaire et de condition suffisante.	Introduit sur des exemples.

2 - Vocabulaire ensembliste

Appartenance, inclusion, notations $\in, \subset$. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.	
Complémentaire, notation $\bar{A}$. Union, intersection, notations $\cup, \cap$. Distributivité, lois de Morgan.	Lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques.
Définition du produit cartésien d'ensembles.	Exemples : $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^n$.
Applications, composition, restriction. Applications injectives, surjectives, bijectives.	Introduire ces notions en situation. Le vocabulaire doit être connu.

3 - Les nombres entiers

Notations $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$.	
Raisonnement par récurrence.	Il sera introduit sur des exemples.
Notations $\sum, \prod$. Définition de $n!$.	
Formules $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$	Savoir les retrouver.

4 - La droite réelle

Propriétés élémentaires des opérations de $(\mathbf{R}, +, \times)$. Manipulation d'inégalités. Intervalles. Valeur absolue, inégalité triangulaire.	La construction de $\mathbf{R}$ n'est pas au programme.
Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.	L'existence d'une borne supérieure (inférieure) pour toute partie non vide majorée (minorée) de $\mathbf{R}$ est admise.

5 - Le plan complexe

Partie réelle, partie imaginaire, conjugué d'un nombre complexe.	On donnera l'interprétation géométrique de ces notions.
Opérations, propriétés élémentaires de $(\mathbf{C}, +, \times)$, calcul du quotient en coordonnées cartésiennes.	
Module, argument, notation exponentielle, calcul du produit et du quotient en coordonnées polaires.	Lien avec la notion informelle de coordonnées polaires.
Formules d'Euler et de Moivre.	Lien avec les formules trigonométriques.
Résolution des équations du second degré à coefficients réels.	Les formules de résolution sont exigibles, ainsi que leur démonstration.

Première année

I - Suites et séries de nombres réels

Limite (finie ou infinie) d'une suite.	On donnera la définition sans en faire un usage systématique.
Unicité de la limite.	
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations algébriques sur les suites convergentes.	
Passage à la limite dans des inégalités.	
Étude de convergence par encadrement.	
Comparaison entre les suites $n!, a^n, n^b, (\ln n)^c$.	
Suites monotones, limites des suites monotones.	Toute suite croissante admet une limite (finie ou infinie) qui est, si elle est majorée, la borne supérieure de ses termes (démonstration non exigible).
Suites définies par récurrence, suites géométriques, suites arithmétiques, suites arithmético-géométriques.	Aucune théorie générale n'est exigible sur les suites définies par récurrence.
Séries à termes positifs. Somme (finie ou infinie).	On pourra montrer l'existence d'une valeur limite (finie ou infinie) par la croissance des sommes partielles. Paradoxe de Zénon.
$\sum_k \sum_l a_{k,l} = \sum_l \sum_k a_{k,l}$	Résultat admis (les termes sont positifs).
Séries géométriques.	
Convergence des séries de Riemann $\sum n^{-a}$.	Résultat admis, la démonstration par comparaison avec l'intégrale pourra être traitée en exercice le moment venu.
Sommation d'inégalités.	Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, $\sum_n u_n \leqslant \sum_n v_n$. En particulier, si $\sum_n v_n$ est finie, alors $\sum_n u_n$ aussi.
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; pour $\lvert x \rvert < 1$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.	Admis. À part ces exemples, on ne fera aucune théorie sur les séries à termes non positifs.

II - **Algèbre linéaire**

L'accent sera mis dans la présentation de l'algèbre linéaire sur les sous-espaces de $\mathbf{R}^n$, avec de nombreux exemples en dimension 2 ou 3 visant à développer l'intuition géométrique. Représenter un sous-espace vectoriel comme noyau d'une matrice revient à en donner un système d'équations. Représenter un sous-espace vectoriel comme image d'une matrice revient à en donner une description paramétrique. On montrera notamment comment passer d'un point de vue à l'autre.

1 - L'espace $\mathbf{R}^n$

Définition de l'espace $\mathbf{R}^n$ des n-uplets de réels, interprétation géométrique comme vecteurs.	
Les opérations $+ : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ et $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Les propriétés : commutativité $x + y = y + x$; associativités $(x + y) + z = x + (y + z)$; $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$; opposé $x + (-1) \cdot x = 0$; distributivité $(a+b)\cdot(x+y) = a\cdot x+a\cdot y+b\cdot x+b\cdot y$.	On définira les opérations par leur expression algébrique en en donnant l'interprétation géométrique. Les propriétés pourront être démontrées à partir de la définition des opérations.
Notion de combinaison linéaire, définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.	
Classification des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.	Si le sous-espace n'est pas $\{0\}$, il contient un vecteur non nul e. Si tous les éléments du sous-espace sont proportionnels à e, c'est une droite vectorielle, sinon, c'est $\mathbf{R}^2$.
Représentation d'une droite vectorielle ou affine par équation ou par paramétrisation.	

2 - Matrices et systèmes linéaires

Matrices à coefficients réels. Application associée de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$.	$(x_i) \mapsto (\sum_j A_{ij} x_j)$
Définition d'une application linéaire de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$.	
L'application associée à une matrice est linéaire.	
Toute application linéaire est associée à une matrice.	
Somme de matrices, produit par un réel, propriétés.	Les opérations sur $\mathbf{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ vérifient les mêmes propriétés que celles de $\mathbf{R}^{mn}$.
Produit de matrices et composition.	
Systèmes linéaires, écriture sous la forme $A(x) = y$.	
Noyau d'une application linéaire. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.	

Algorithme de Gauss pour réduire un système linéaire (une matrice) à une forme échelonnée par opérations sur les lignes.

On donnera des exemples de résolution de systèmes linéaires (homogènes ou non) en utilisant l'algorithme de Gauss. Des exemples où il existe une solution unique, où il n'existe pas de solution, et où il existe plusieurs solutions seront traités. Dans ce dernier cas, on donnera une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions.

Le système $A(x) = 0$ a des solutions non triviales si A a moins de lignes que de colonnes.

Ce résultat sera utilisé en théorie de la dimension.

Détermination d'un système d'équations pour l'image d'une matrice (écriture de l'image d'une matrice comme noyau d'une autre matrice).

Matrice transposée, produit des transposées.

$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

3 - Matrices carrées inversibles

Dans cette section les matrices sont carrées (et réelles).

Matrice diagonale, triangulaire.

Résolution des systèmes linéaires associés.

Trace, trace d'un produit.

Matrice inversible, équivalence entre :

– le système $A(x) = y$ a une unique solution pour tout y ;
– il existe une matrice carrée B telle que $AB = I = BA$.

La matrice B est alors unique, c'est l'inverse de A, notée A^{-1}.
La solution du système $A(x) = y$ est $x = A^{-1}(y)$.

Calcul de l'inverse par pivot de Gauss.
Inverse d'un produit.
Les opérations sur les lignes correspondent à des multiplications à gauche par des matrices inversibles, matrices des opérations élémentaires.

Déterminant des matrices 2×2.

Une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
La théorie générale des déterminants est hors programme.

4 - Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$

Le noyau et l'image d'une matrice sont des sous-espaces vectoriels.

Le noyau est l'ensemble des solutions du système $A(x) = 0$, l'image est l'ensemble des seconds membres y tels que le système $A(x) = y$ a une solution. L'image est aussi le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice.
Famille libre de vecteurs de $\mathbf{R}^n$, base d'un sous-espace vectoriel, coordonnées dans une base. Base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Dans un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, une famille libre a un nombre d'éléments inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice. Toutes les bases ont le même nombre d'éléments.
Toute famille libre de $\mathbf{R}^n$ a au plus n éléments.

Pour la démonstration, on pourra utiliser qu'un système linéaire homogène ayant moins d'équations que d'inconnues a des solutions non triviales.

Existence d'une base pour tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, théorème de la base incomplète.

Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Trouver une base du noyau d'une matrice est une compétence exigible.
Si $E \subset F \subset \mathbf{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels, alors la dimension de E est inférieure ou égale à celle de F.

Dans un sous-espace vectoriel de dimension d, une famille libre à d éléments est une base, une famille génératrice à d éléments est une base.

5 - Applications linéaires entre sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$.

Noyau et image d'une application linéaire, rang.

Représentation par une matrice dans des bases.

Changement de bases, formule $A' = Q^{-1}AP$.

Toute application linéaire de rang r peut être représentée dans des bases appropriées par la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet énoncé pourra être démontré en utilisant le théorème de la base incomplète ou en utilisant les opérations élémentaires. Il conduit au théorème du rang.

Théorème du rang.

Isomorphismes.
Une application linéaire entre sous-espaces vectoriels de même dimension est un isomorphisme si elle est injective, si elle est surjective.
Deux sous-espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.

En particulier $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ ne sont pas isomorphes pour $n \neq m$.

6 - Rang d'une matrice

Le rang en lignes est égal au rang en colonnes.

On pourra se ramener à la matrice équivalente de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le rang est le nombre de lignes non nulles dans les formes échelonnées.
Toute matrice carrée inversible à droite (à gauche) est inversible.

7 - Espaces vectoriels

Un espace vectoriel de dimension n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$, d'une opération externe $\cdot$, et d'une bijection f de E dans $\mathbf{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.

On ne considérera donc que des espaces vectoriels de dimension finie. Cette définition a pour but de permettre de discuter d'espaces autres que $\mathbf{R}^n$, mais aucune difficulté abstraite ne sera soulevée.

Applications linéaires entre espaces vectoriels, endomorphismes, isomorphismes.
Exemples : $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_n[x], \mathbf{M}_{n,m}(\mathbf{R}), \mathcal{L}(E, F)$.

La notion d'indéterminée ne sera pas introduite.

Sous-espaces vectoriels et restrictions d'applications linéaires.
Bases d'espaces vectoriels, la dimension est aussi le cardinal des bases.

La bijection structurelle f permet de se ramener à la théorie de $\mathbf{R}^n$.

III - Fonctions d'une variable réelle

Un des objectifs principaux est de savoir étudier une fonction, tracer et interpréter son graphe.

Domaine de définition, tableau de variations, graphe d'une fonction.

On notera indifféremment une fonction de la variable x, quand le contexte est sans ambiguïté, par $x \mapsto f(x)$ ou simplement $f(x)$.

Graphe des fonctions x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\ln x$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $|x|$.

Ces graphes serviront d'illustrations aux concepts introduits dans cette section.

Fonctions périodiques, paires, impaires, majorées, minorées, bornées.
Fonctions monotones, strictement monotones.

1 - Limites et continuité

Limite (finie ou infinie) d'une fonction en un point, limite à gauche, limite à droite, limites en $\pm\infty$.

Les définitions seront interprétées graphiquement et illustrées par des exemples.
On remarquera, sans s'y attarder formellement, que la notion de limite en un point s'étend au cas d'une fonction non définie en ce point.

Opérations algébriques sur les limites.
Limites et composition (de deux fonctions ou d'une fonction et d'une suite).
Unicité de la limite, passage à la limite dans des inégalités.

Étude de convergence par encadrement.

$\lim_0 x^a |\ln x|^b$, $\lim_\infty x^a |\ln x|^b$, $\lim_{\pm\infty} |x|^a e^x$.

La démonstration de l'existence et de la valeur de ces limites n'est pas exigible.

Continuité, opérations sur les fonctions continues.
Les fonctions classiques sont continues sur leur domaine de définition : ln, exp, sin, cos, x^a, $|x|$.

La continuité est vraie par définition pour exp, elle est admise pour sin, cos. Elle sera démontrée pour ln en tant que fonction réciproque de exp.

Exemples de prolongement par continuité.

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.	Résultat admis.
Théorème des valeurs intermédiaires.	
Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint son maximum et son minimum.	
Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet une fonction réciproque sur l'intervalle image, qui est continue et strictement monotone.	La fonction arctan sera introduite comme exemple.
Graphe de la fonction réciproque par symétrie.	

2 - Dérivées

Dérivée, dérivée à gauche, dérivée à droite, interprétation graphique.	La dérivabilité implique la continuité.
Équation de la droite tangente au graphe en un point.	
Fonction dérivée. Cas des fonctions classiques : ln, exp, sin, cos, x^a.	
Méthodes de calcul (linéarité, produit, quotient, composition).	
Dérivée de la fonction réciproque.	Application au calcul de la dérivée de arctan.
Développement limité d'ordre 1.	
Dérivée et extremums.	Une fonction dérivable sur $[a, b]$ atteint son minimum en un point x_0. Si $x_0 \in]a, b[$ alors $f'(x_0) = 0$, si $x_0 = a$ alors $f'(a^+) \geqslant 0$, si $x_0 = b$ alors $f'(b^-) \leqslant 0$. Démonstration à partir du développement limité. Exemples. On fera remarquer qu'un point critique (c'est-à-dire un point où la fonction dérivée s'annule) n'est pas forcément un extremum.
Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis.	Démonstration ce qui précède.
Inégalité des accroissements finis.	On donnera les versions de l'inégalité pour $m \leqslant f' \leqslant M$ et pour $\|f'\| \leqslant k$. Exemples d'application à la convergence de suites récurrentes.
Utilisation de la dérivée pour l'étude des variations.	Une fonction est constante sur un intervalle si et seulement si sa dérivée est identiquement nulle. Une fonction est croissante sur un intervalle si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle.
Une fonction dont la dérivée est strictement positive est strictement croissante.	On donnera la démonstration. On remarquera, sans formalisation, que le résultat reste vrai si la dérivée s'annule en un nombre fini de points.
Dérivées d'ordre supérieur, fonctions $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$.	On insistera plus sur les conclusions et l'utilisation des résultats que sur leurs hypothèses de régularité.

3 - Exemple d'étude de fonction : régression linéaire

On considère des données se présentant comme des couples de variables $(x_i, y_i), 1 \leqslant i \leqslant n$, où x_i est vue comme une variable explicative de y_i. En notant $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes, on cherche un coefficient a tel que $\bar{y} + a(x - \bar{x})$ soit une bonne approximation de y. On peut pour cela minimiser la somme des écarts quadratiques

$$\sum_i (y_i - \bar{y} - a(x_i - \bar{x}))^2.$$

En étudiant la fonction de a ci-dessus, on montre que la valeur optimale de a est

$$a = \frac{\sum_i ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

C'est le britannique Francis Galton qui a introduit la méthode au 19e siècle pour étudier la taille des enfants y_i en fonction de la taille des parents x_i, obtenant un coefficient $a \approx 2/3$. Le fait que $a > 0$ signifie que les enfants sont (en moyenne) plus grands que la moyenne lorsque les parents le sont. Le fait que $a < 1$ signifie un retour vers la moyenne, « regression towards the mean » en anglais, d'où le nom de la méthode. Les explications génétiques que Galton donna de ce phénomène sont aujourd'hui considérées comme incorrectes.
On pourra interpréter cette valeur comme

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\mathrm{Var}(x)},$$

en lien avec le cours de probabilités.

4 - Intégration

Définition informelle de l'intégrale $\int_a^b f$ comme aire algébrique.

On ne soulèvera pas de difficulté sur la régularité de f, on limitera la discussion aux fonctions continues.

Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, monotonie.
Inégalité de la moyenne.

Les propriétés ne seront pas démontrées, mais interprétées en termes géométriques.

La fonction $\int^x f$ est une primitive de f.
Les primitives de f diffèrent d'une constante additive.

Démonstration à partir des propriétés de l'intégrale.

Relation $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Vraie pour toute primitive F de f.

Primitives de fonctions usuelles : e^x, x^a, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$.

Calcul d'intégrales : intégration par parties, changements de variable.

Il n'est pas attendu des étudiants qu'ils sachent trouver eux-mêmes les bons changements de variable, sauf dans quelques cas simples comme les changements affines.

IV - **Probabilités**

L'esprit du programme de probabilités est de familiariser les étudiants au concept de variables aléatoires et de leur indépendance, dont la partie statistique, en deuxième année, peut être vue comme un aboutissement. Les variables aléatoires finies ou discrètes sont plus à envisager comme un contexte dans lequel certaines des propriétés importantes peuvent être démontrées de manière simple que comme une source d'exercices de dénombrement.

1 - Événements aléatoires

Univers Ω, ensemble $\mathcal{E}$ des événements.

$\mathcal{E}$ est un ensemble de parties de Ω. On ne soulèvera pas de difficultés sur l'ensemble $\mathcal{E}$.

Événement A et B, événement A ou B, événement contraire, événements incompatibles, famille complète d'événements.

Lien avec les opérations ensemblistes. On mentionnera que la réunion d'une suite d"événements est un événement.

Probabilité $P : \mathcal{E} \to [0,1]$, axiomes :
$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$;
$P(A) \leqslant P(B)$ si $A \subset B$;
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$;
$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$ si A_i est une suite d'événements deux à deux disjoints.

Probabilité conditionnelle sachant un événement B de probabilité non nulle :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On remarque que $P_B : \mathcal{E} \to [0,1]$ est une probabilité.

Formule des probabilités composées :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Formule des probabilités totales :
$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$.

(B_i) est une famille complète d'événements de probabilité strictement positive.

Formules de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

On donnera des applications concrètes de ces formules.

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

(A_i) est un système complet d'événements, tous les événements sont de probabilité non nulle. On donnera des applications concrètes.

2 - Variables aléatoires discrètes

On considère ici une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble $\mathcal{X} \subset \mathbf{R}$ de la forme $\mathcal{X} = \{x_i, i \in I\}$, où I est soit $\mathbf{N}$, soit $\mathbf{Z}$, soit un ensemble fini.

Une variable aléatoire sur $\mathcal{X}$ est une fonction $X : \Omega \to \mathcal{X}$ telle que $X^{-1}(\{x\}) = \{X = x\}$ est un événement pour tout $x \in \mathcal{X}$.

$(\{X = x\}, x \in \mathcal{X})$ est une famille complète d'événements.

La loi de la variable aléatoire est la fonction $x \mapsto p(x) := P(X = x)$.

$\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$

Pour toute partie $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$,

$$P(X \in \mathcal{X}') = \sum_{x \in \mathcal{X}'} p(x).$$

Fonction de répartition, quantiles.

$F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Variable de Bernoulli, loi de Bernoulli.

L'indicatrice de l'événement A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

Loi uniforme sur un ensemble fini.

3 - Moments des variables aléatoires discrètes réelles positives

Les variables aléatoires sont positives dans cette partie.

Espérance des variables aléatoires positives.

On évoquera l'espérance des variables aléatoires finies de signe quelconque.

Moment d'ordre k (k-moment) $E(X^k) \in [0, \infty]$.

Formule de transfert.
Une variable prenant un nombre fini de valeurs a des moments finis.

Inégalité $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$.

Admise, mais on pourra par la suite faire le lien avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Une variable de second moment fini est donc de premier moment fini.

Propriétés de l'espérance : linéarité, monotonie.

La linéarité est admise.

Variance des variables de moment d'ordre 2 fini :
$V(X) = E((X - E(X))^2)$,
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Définition de l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Puisque $V(|X|) \geqslant 0$ on retrouve l'inégalité $E(|X|)^2 \leqslant E(X^2)$ dans le cas des variables de moment d'ordre 2 fini.

Si $V(X) = 0$, la variable X est constante en dehors d'un événement de probabilité nulle.

Si X est une variable de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p, V(X) = p(1 - p)$.

Inégalité de Markov :

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

si X est une variable aléatoire à valeurs positives et $a > 0$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

si X est une variable aléatoire de second moment fini et $a > 0$.

Covariance de deux variables aléatoires finies :
$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$
$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Coefficient de corrélation de variables aléatoires finies :

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

Invariance d'échelle :
$\mathrm{Cor}(X, Y) = \mathrm{Cor}(aX + b, cY + d)$
pour $a > 0$, $c > 0$.

4 - Indépendance

Indépendance de deux événements :
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Les événements A et B (avec $P(B) \neq 0$) sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$.

Indépendance de variables aléatoires discrètes.

Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, à valeurs dans $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ sont dites indépendantes si, pour toutes parties $A_1 \subset \mathcal{X}_1, \ldots, A_n \subset \mathcal{X}_n$,

$$P\big((X_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)\big) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n).$$

Deux variables de Bernoulli B_1 et B_2 sont indépendantes si et seulement si les événements $\{B_1 = 1\}$ et $\{B_2 = 1\}$ sont indépendants.

Les variables discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si

$$\begin{aligned} &P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \\ &\quad = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \ldots P(X_n = x_n) \end{aligned}$$

pour tout $x_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}_n$.

La covariance de deux variables indépendantes est nulle.

Cette condition n'est pas suffisante.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l$ sont des variables indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_k), Y_1, \ldots, Y_l$ sont indépendantes pour toute fonction f.

On ne soulèvera aucune difficulté sur la notion de fonction de plusieurs variables.

Si les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de second moment fini, alors
$E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$
et $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$.

Démonstration dans le cas fini.

5 - Processus de Bernoulli

On considère dans cette section une suite $X_i, i \in \mathbf{N}^*$ de variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. L'indépendance signifie ici que, pour tout n, les variables $X_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ sont indépendantes.

Soit T l'indice du premier 1. Alors T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$. Sa loi est la loi géométrique :

$$P(T = n) = p(1-p)^{n-1}$$

$$P(T > n) = (1-p)^n.$$

Notation $\mathcal{G}(p)$ de la loi géométrique de paramètre p.

Les lois géométriques satisfont la propriété

$$P(T > j + k \mid T > j) = P(T > k).$$

On pourra remarquer que cette propriété caractérise les lois géométriques, mais la démonstration n'est pas exigible.

Moments : $E(T) = 1/p, V(T) = (1-p)/p^2$.

On présentera le calcul de l'espérance en admettant la dérivation sous le signe somme.

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. La loi de S_n est la loi binomiale de paramètres n et p :

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On introduira à cette occasion les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ de manière combinatoire et la notation $\mathcal{B}(n, p)$ pour la loi binomiale de paramètres n et p.

Relations :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Triangle de Pascal.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Relation

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Lien avec la loi binomiale de paramètres n et $p = a/(a+b)$ lorsque a et b sont positifs.

Moments :
$E(S_n) = np, V(S_n) = nV(X_1) = np(1-p)$.

La somme de deux variables binomiales indépendantes de paramètres (k, p) et (l, p) est une variable binomiale de paramètres $(k + l, p)$.

On justifiera ce résultat en interprétant cette somme comme une somme de $(k + l)$ variables de Bernoulli indépendantes.

Loi de Poisson de paramètre λ :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Notation $\mathcal{P}(\lambda)$.

Moments d'une variable X suivant une loi de Poisson de paramètre λ :
$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda$.

On présentera le calcul de l'espérance en admettant la dérivation sous le signe somme.

On démontrera la convergence quand $n \to \infty$ de la suite de lois binomiales de paramètres n et p_n vers la loi de Poisson de paramètre λ si $np_n \to \lambda$:

$$\forall k \qquad \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Il s'agit ici d'une convergence pour chaque k.
On ne discutera pas le concept de convergence en loi en général.
Interprétation, paradigme de Poisson :
La somme S_n d'un grand nombre de variables de Bernoulli indépendantes de petit paramètre suit approximativement la loi de Poisson de paramètre $E(S_n)$.
On illustrera ce paradigme par des exemples concrets.
Exemple : dans un texte, le nombre de coquilles par page peut être modélisé par une loi de Poisson. Si, dans une collection de qualité et de pagination homogènes, le nombre moyen de coquilles par page a été estimé à 1/2, la probabilité qu'une page donnée ne contienne pas de coquille est de 60% environ.

Deuxième année

I - **Algèbre et géométrie**

Comme en première année, les scalaires sont réels, et le contexte est celui de $\mathbf{R}^n$ (ou, éventuellement, d'espaces isomorphes à $\mathbf{R}^n$ comme $\mathbf{R}_k[x]$ et $\mathbf{M}_{k,l}(\mathbf{R})$) et de ses sous-espaces.

1 - Somme directe, supplémentaire

Somme de sous-espaces vectoriels.

$E + F = \{x + y, x \in E, y \in F\}$.

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels, caractérisation par l'intersection.

La réunion d'une base de E et d'une base de F est une base de $E \oplus F$.

Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un autre, dimension des supplémentaires.

Si F est un sous-espace vectoriel, et E un sous-espace vectoriel de F, alors E admet un supplémentaire dans F.

Projection sur E parallèlement à F.
Tout endomorphisme P vérifiant $P^2 = P$ est une projection.

$F = \ker P, E = \ker(P - I)$

Symétrie par rapport à E le long de F.
Tout endomorphisme S vérifiant $S^2 = I$ est une symétrie.

$F = \ker(S + I), E = \ker(S - I)$
Cette définition inclut le cas $S = I$.

2 - Valeurs propres des endomorphismes

Représentation d'un endomorphisme dans une base par une matrice carrée, changement de base, formule $A' = P^{-1}AP$.

Valeurs propres, vecteurs propres.

Des vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont distinctes forment une famille libre.

Endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable.

Une matrice A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle il est représenté par une matrice diagonale.

Une application linéaire d'un sous-espace vectoriel E dans lui-même est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de cette application linéaire.

Si une matrice carrée $n \times n$ admet n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Diagonalisation pratique des matrices 2×2.

3 - Produit scalaire

Seul le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$ sera étudié, aucun développement sur les espaces euclidiens plus généraux n'est au programme.

Définition du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$ et de la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

La convergence de la suite $(\|x^{(m)}\|)$ vers 0 est équivalente à celle de chacune des suites de coordonnées $(x_i^{(m)})$.

Bilinéarité et symétrie du produit scalaire

Formule $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^{\mathrm{T}}y\rangle$.

Orthogonalité entre deux vecteurs. Théorème de Pythagore : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si x et y sont orthogonaux.

Familles orthogonales, orthonormées, base orthonormée.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille orthonormée se complète en une base orthonormée.

Coordonnées dans une base orthonormée.

$x = \sum_i \langle e_i, x\rangle e_i, \quad \|x\|^2 = \sum_i \langle e_i, x\rangle^2$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|\|y\|$.

Démonstration possible : Dans une base orthonormée telle que $\|x\|e_1 = x$, on a :

$$\|y\|^2 = \sum_i \langle e_i, y\rangle^2 \geqslant \langle e_1, y\rangle^2.$$

Inégalité triangulaire $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
Distance $\|x-y\|$.

Boule, sphère de centre et de rayon donnés.	
Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace vectoriel. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en est un supplémentaire.	
Pour tout sous-espace vectoriel E, $E^{\perp\perp} = E$.	Une base de l'orthogonal donne un système d'équations du sous-espace.
Hyperplans.	L'orthogonal d'un vecteur non nul est un hyperplan. Deux vecteurs orthogonaux à un même hyperplan sont colinéaires.
Projection orthogonale P_E sur un sous-espace E muni d'une base orthonormée (e_i) (c'est la projection sur E parallèlement à $E^\perp$).	$P_E(x) = \sum_i \langle e_i, x\rangle e_i$ Le projeté $P_E(x)$ de x sur E est le point de E le plus proche de x. La distance au sous-espace E est $\\|x - P_E(x)\\|$.

II - Étude locale des fonctions d'une variable réelle

1 - Fonctions polynomiales

Étude de polynômes, limites en $\pm\infty$. Racines (réelles), tout polynôme de degré impair admet une racine.	Les polynômes sont à coefficients réels et sont vus comme des fonctions d'une variable réelle.
Factorisation d'un polynôme par $(x - x_0)$ si x_0 est une racine.	L'existence d'une factorisation est admise, mais savoir factoriser en pratique est exigible.
Multiplicité d'une racine : la racine x_0 est de multiplicité k si $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$, avec $g(x_0) \neq 0$.	Si x_0 est une racine de f de multiplicité $k \geqslant 2$, alors c'est une racine de f' de multiplicité $k-1$.
Un polynôme change de signe en une racine si et seulement si sa multiplicité est impaire.	
Un polynôme f admet un extremum local en x_0 si et seulement si x_0 est une racine de f' de multiplicité impaire.	Les étudiants doivent connaître le cas $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$.

2 - Développements limités

On se limitera autant que possible à l'ordre 2 ou 3 et on ne cherchera aucune technicité.

Développements limités, formule de Taylor Young (admise). Unicité du développement limité.	Quelques exemples simples de calcul de limite à l'aide de développements limités.
Développement limité de e^x et $(1-x)^{-1}$ à tout ordre. Premiers termes de $(1+x)^a$ et $\ln(1+x)$.	
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_k x^k + x^k \varepsilon(x),$$ où $k \geqslant 2$ et $a_k \neq 0$.	La forme du graphe en un point dépend principalement du premier terme non linéaire du développement limité. Exemples avec $k = 2$ ou $k = 3$.

Lien avec les extremums locaux et les points d'inflexion.

En un minimum local à l'intérieur du domaine de définition, le coefficient a_2 d'ordre 2 du développement limité vérifie $a_2 \geqslant 0$.
Un point où $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$ est un minimum local.

Détermination de l'asymptote oblique d'une fonction en l'infini. Position par rapport à l'asymptote.

Étude de la fonction e^{-x^2}.

La forme du graphe doit être connue.

3 - Intégrales généralisées

Notion d'intégrale généralisée pour des fonctions positives, du type

$$\int_a^b f \in [0, \infty]$$

où a ou b peuvent être infinis et où f est continue sur $]a, b[$.

On donnera la définition comme limite tout en évoquant une notion informelle directe comme une aire (finie ou infinie).
Les deux terminologies pourront être employées : intégrale convergente (divergente) ; intégrale finie (infinie).

Extension des propriétés de linéarité, de monotonie, et de la relation de Chasles à ce cadre.

Admises.

$\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.

$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

Valeur admise, on pourra toutefois démontrer la convergence par comparaison.

Conditions de convergence de $\int_0 t^{-a}\mathrm{d}t$ et $\int^\infty t^{-a}\mathrm{d}t$.

III - **Fonctions de deux variables réelles**

Le niveau de formalisme de cette partie sera minimal. On ne cherchera pas à préciser les hypothèses générales des résultats. Aucune notion précise sur la classe de régularité d'une fonction de deux variables n'est exigible. Les fonctions seront le plus souvent définies sur le plan $\mathbf{R}^2$ tout entier. Dans le cas contraire, on ne soulèvera aucune difficulté liée au bord de l'ensemble de définition.

Notation $f(x) = f(x_1, x_2)$.

1 - Exemples

Graphe, lignes de niveau. Étude d'exemples, notamment les suivants (allure du graphe et des lignes de niveau) :

Fonctions coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ et $(x_1, x_2) \mapsto x_2$.

Fonctions linéaires $ax_1 + bx_2$.

Le vecteur (a, b) est orthogonal aux droites de niveau.

2 - Dérivées partielles

Dérivées partielles.

Notations $\partial_1 f$, $\partial_2 f$.

Définition d'un extremum local, condition nécessaire : $\partial_1 f = 0 = \partial_2 f$.
Point critique, tout minimum local est un point critique.

Le point x_0 est un minimum local s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant f(x_0)$ dans le disque $B(x_0, \delta)$. On ne discutera pas d'extremum atteint au bord du domaine de définition.
Démonstration des conditions d'optimalité à l'aide des fonctions $t \mapsto f(t, x_2)$ et $t \mapsto f(x_1, t)$.

3 - Fonctions quadratiques

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

La fonction quadratique a un extremum local (strict) en 0 si et seulement si le discriminant $\Delta = b^2 - ac$ est (strictement) négatif.
Détermination (dans les cas $\Delta < 0$) du type d'extremum en fonction du signe de a et c.

4 - Retour sur la régression linéaire

Il n'est pas demandé aux étudiants de connaître les résultats de cet exemple, mais de savoir les retrouver.

Dans la présentation classique de la régression linéaire, on cherche deux coefficients a et b tels que $b + ax$ soit une aussi bonne approximation que possible de y. On minimise pour cela la fonction

$$f(a, b) = \sum_i (y_i - b - ax_i)^2,$$

et on retrouve $a = \mathrm{Cov}(x, y)/\mathrm{Var}(x)$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

On trouve le point critique en calculant les dérivées partielles. On remarque que c'est la même approximation que dans la première approche.
On pourra justifier que c'est un minimum par l'interprétation géométrique suivante. Dans l'espace $\mathbf{R}^n$ (n est le nombre de données), on considère $e = (1, \ldots, 1)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$. La fonction $f(a, b)$ s'interprète comme le carré de la distance entre les points y et $ax + be$. Les valeurs optimales de a et b correspondent donc à l'unique point $ax + be$ du sous-espace $E = \mathrm{Vect}(e, x)$ tel que $y - (ax + be)$ est orthogonal à E. En écrivant le système

$$\langle y - (ax + be), x \rangle = 0, \langle y - (ax + be), e \rangle = 0,$$

on retrouve bien

$$a = \frac{\langle e, e \rangle \langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle y, e \rangle}{\langle e, e \rangle \langle x, x \rangle - \langle x, e \rangle^2}, \ b = \frac{\langle y, e \rangle - a \langle x, e \rangle}{\langle e, e \rangle}.$$

5 - Étude des points critiques

Dérivées partielles d'ordre 2.

Notations $\partial^2_{1,1}f, \partial^2_{1,2}f, \partial^2_{2,1}f, \partial^2_{2,2}f$

Égalité $\partial^2_{1,2}f(x) = \partial^2_{2,1}f(x)$.

Admis.

Soit x un point critique de f. Si le discriminant de la fonction quadratique

$$q(y_1, y_2) = \partial^2_{1,1}f(x)y_1^2 + 2\partial^2_{1,2}f(x)y_1y_2 + \partial^2_{2,2}f(x)y_2^2$$

est strictement négatif, alors la fonction f a un extremum local en x, qui est de même nature que celui de la fonction q en 0.

Admis.

IV - Probabilités

1 - Variables aléatoires à densité

Soit ρ une fonction positive de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. La fonction $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire de densité ρ si, pour tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbf{R}$, l'ensemble $\{X \in]a, b[\}$ est un événement et

$$P(X \in]a, b[) = \int_a^b \rho(x)\, dx.$$

On se limitera au cas de densités ρ continues (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
On remarquera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho = P(\Omega) = 1.$$

Si X est une variable à densité, alors $P(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$

Un événement de probabilité nulle n'est pas forcément impossible.

Fonction de répartition :
$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \rho$.
Inverse (réciproque) de la fonction de répartition et quantiles.

La fonction de répartition caractérise la densité (si la densité est continue).

Exemples de calcul de fonctions de répartition et de densités de variables images $f \circ X$ avec f monotone.

Loi uniforme sur un intervalle borné.

Moments :
$\int_{\mathbf{R}} |x|^k \rho(x)dx = \int_0^{\infty} x^k(\rho(x) + \rho(-x))dx$.
Espérance des variables à densité de premier moment fini :

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\rho(x)dx - \int_0^{\infty} x\rho(-x)dx.$$

Cette expression de l'espérance permet de ne manipuler que des intégrales de fonctions positives.

Propriétés de l'espérance : linéarité, monotonie.

Admises.

Variance $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$,
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Définition de l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La variable

$$X^* := \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée réduite.

Elle a pour densité

$$\rho^*(x) = \sigma(X)\rho(E(X) + \sigma(X)x).$$

Inégalité de Markov :

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

si X est une variable aléatoire à valeurs positives et $a > 0$.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

si X est une variable aléatoire de second moment fini et $a > 0$.

2 - Loi normale, loi exponentielle

Une variable aléatoire gaussienne (ou normale) centrée réduite est une variable X admettant la densité

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

On a $E(X) = 0$, $V(X) = 1$.
La variable $Y = \sigma X + E$ est alors une variable gaussienne (ou normale) de moyenne E et de variance σ^2, elle admet la densité

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-E)^2/2\sigma^2}.$$

Loi exponentielle : $\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $\mathbf{R}_+$
$E(X) = 1/\lambda$, $V(X) = 1/\lambda^2$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $P(X > x) = e^{-\lambda x}$.
Les lois exponentielles satisfont la propriété

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s),$$

pour tous réels s et t positifs ou nuls.

Cette propriété caractérise les lois exponentielles (démonstration non exigible).
Les lois exponentielles s'interprètent comme les lois de durée de vie sans vieillissement. Ce sont des variantes continues des lois géométriques.

3 - Indépendance de variables à densité

Les variables aléatoires à densité $X_1, \dots, X_n$ sont dites indépendantes si

$$P((X_1 \in I_1) \cap \dots \cap (X_n \in I_n)) = P(X_1 \in I_1) \cdots P(X_n \in I_n)$$

pour tous intervalles I_k de $\mathbf{R}$.

On limitera l'utilisation de cette définition.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes :
$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$,
$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$.

Propriété admise. La loi d'une somme de variables aléatoires est hors programme.

On pourra, comme en première année, introduire la covariance et le coefficient de corrélation sans discuter les problèmes de définition des intégrales.
Cov $(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y)))$,
Cov $(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$,
Cor $(X, Y) = \dfrac{\text{Cov } (X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.
La covariance de deux variables indépendantes est nulle (condition non suffisante).

4 - Statistiques

Soit X une variable aléatoire (discrète ou à densité). Soient X_i, $i \in \mathbf{N}^*$, des variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On considère les variables aléatoires $\bar{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

$E(\bar{X}_n) = E(X), V(\bar{X}_n) = V(X)/n.$

Loi faible des grands nombres :

$$P(|\bar{X}_n - E(X)| \geqslant \varepsilon) \to 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration dans le cas $V(X) < \infty$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|\bar{X}_n - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{V(\bar{X})}{n\varepsilon^2}.$$

Intervalle de confiance :
La probabilité que l'intervalle

$$\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{V}{na}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{V}{na}}\right]$$

contienne $E(X)$ est supérieure ou égale à $1 - a$.

On discutera la notion d'intervalle de confiance au niveau $1 - a$. On démontrera l'énoncé ci-contre à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
En pratique :
La variance V est souvent inconnue, mais on peut la majorer :
dans le cas général d'une variable aléatoire bornée $|X| \leqslant M$, par M^2 ;
dans le cas d'une variable de Bernoulli, par $1/4$.
Application numérique :
Pour $n = 1000$, au seuil de confiance de 90%, l'incertitude est de 5% pour une variable de Bernoulli.

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Écoles

Filière : **littéraire**

Voie : **B/L**

Sciences sociales

Première et seconde années

Programme de sciences sociales

Présentation générale

L'enseignement de sciences sociales est une formation générale dont l'objet est l'analyse des sociétés contemporaines. Il associe principalement trois approches complémentaires (la science économique, la sociologie et la science politique) et a pour ambition de faire acquérir aux étudiants les savoirs fondamentaux de ces trois sciences ainsi que des compétences d'analyse et d'argumentation.
L'horaire hebdomadaire est de 6 heures. Le programme est défini sur l'ensemble de la formation de deux ans.

Les démarches de l'économie et de la sociologie

a) Constitution de l'économie (depuis Smith) et de la sociologie (depuis Durkheim)
b) Introduction aux raisonnements et méthodes
c) L'économie, la sociologie et les autres disciplines

1) Sociologie

1 – Production et dynamiques de l'ordre social

a) Individus et société
b) Interactions et réseaux
c) Instances et processus de socialisation : famille, école, travail
d) Valeurs, normes, déviances

2 – Rapports sociaux et stratification sociale

a) Statuts, professions, classes sociales
b) Rapports sociaux : genre, âge, génération, origine
c) Les dimensions spatiales de la stratification sociale
d) La mobilité sociale

3 – Cultures et sociétés

a) Culture et cultures : diversité, dynamique, mondialisation
b) Pratiques culturelles et hiérarchies sociales
c) La dimension sociale de la consommation

4 – Pouvoir, participation politique et action collective

a) Pouvoir, domination, autorité, légitimité
b) Opinions, opinion publique, comportements électoraux
c) Les différentes formes de participation politique et d'engagement
d) Mobilisation, groupes d'intérêt, mouvements sociaux

2) Économie

1 – Analyse microéconomique du consommateur et du producteur

a) Fonction d'utilité, contrainte budgétaire, effet de revenu et de substitution, courbe de demande

b) L'offre de travail : arbitrage consommation/loisir, capital humain

c) Fonctions de production, rendements, courbes de coût, offre en concurrence parfaite et imparfaite (monopole, duopole, concurrence monopolistique)

d) Les choix intertemporels du consommateur et du producteur : consommation, épargne, investissement

Nota : *La théorie des jeux ne sera pas demandée pour elle-même.*

2 – Concurrence, équilibre et optimalité

a) Gains à l'échange, application au commerce international : les avantages comparatifs

b) Équilibre partiel, équilibre général

c) Optimum et défaillances de marché

3 – Les fonctions macroéconomiques

a) Les grands indicateurs macroéconomiques (tendance et fluctuations), notamment : PIB, taux d'inflation, taux de chômage, agrégats monétaires, balance des paiements

b) Les fonctions de consommation, d'épargne et d'investissement

c) La monnaie, le système bancaire et financier

Nota : *La théorie des marchés financiers ne sera pas demandée pour elle-même.*

4 – Les politiques économiques

a) L'équilibre macroéconomique : le modèle IS-LM en économie fermée et ouverte, courbes de Phillips, le modèle offre/demande globales et ses développements

b) Les politiques monétaires et budgétaires, application dans le cadre de l'Union européenne

c) Les politiques structurelles et de compétitivité

Nota : *Les théories du taux de change ne seront pas demandées pour elles-mêmes. Les théories de la croissance ne sont pas au programme.*

3) Objets communs aux sciences sociales

1 – Acteurs, institutions et organisations

a) Rationalité, anticipations, croyances
b) Les formes de l'échange
c) Différentes formes d'institutions et d'organisations : État, marchés, entreprises, associations

2 – L'action publique

a) Les pouvoirs publics : des instances locales aux instances supranationales
b) La construction des problèmes publics
c) Les politiques publiques : élaboration, mise en œuvre, évaluation
d) Agents et usagers des services publics

3 - Travail, emploi, chômage

a) Définitions, mesures, tendances
b) Le marché du travail : construction et fonctionnement
c) Formes d'emploi, organisations du travail, conditions de travail
d) Politiques d'emploi et de lutte contre le chômage

4 – Inégalités

a) Différences, inégalités, discriminations, ségrégations
b) Pauvreté et exclusion
c) Justice sociale, redistribution, protection sociale

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **littéraire**

Voie : **A/L**

Objectifs de formation

Première année

Objectifs de formation de la première année des classes préparatoires de lettres (A/L)

Situées entre la classe terminale des lycées et l'entrée dans les écoles normales supérieures (ENS), d'autres grandes écoles ou les universités, les classes de lettres de première et seconde années constituent un parcours de haut niveau et s'inscrivent dans le cadre de l'architecture européenne des études au sein de celles qui conduisent à la licence.
En conformité avec le principe d'interdisciplinarité qui caractérise la formation en classe de lettres première année, les enseignements dans chaque discipline dispensent une formation générale qui ne préjuge pas des parcours ultérieurs des étudiants. Les compétences acquises au cours des études dans les classes de lettres première et seconde année leur permettent en effet de se porter candidats à l'entrée dans de nombreuses grandes écoles et formations d'enseignement supérieur, parties prenantes de l'accord qui fait des épreuves écrites des ENS, réunies dans la Banque d'Epreuves Littéraires (BEL), une composante majeure de l'admissibilité aux épreuves orales de leurs concours spécifiques.
La formation dispensée s'enracine dans des connaissances, appelant nécessairement la définition de contenus. Dans la mesure où le programme est fortement corrélé à celui des épreuves des concours d'entrée dans les grandes écoles, les objectifs de formation dans chaque discipline s'ordonnent autour d'exemples de problématiques ou de notions. Si elles définissent un certain nombre d'obligations, les propositions développées dans les annexes II à VII permettent à chaque professeur, qui demeure responsable de son cours, d'exercer pleinement ses responsabilités pédagogiques, dans le cadre d'une organisation de l'année en deux semestres.

Le premier semestre

La découverte par les étudiants des exigences de haut niveau qui sont celles des classes préparatoires, tant pour ce qui est des connaissances et des capacités à acquérir que des attitudes à adopter, fait du premier semestre de la classe de lettres première année, à savoir les 18 à 20 semaines entre la rentrée début septembre et la fin du mois de janvier, une période cruciale à traiter avec un soin particulier. Alors que les classes accueillent des étudiants aux parcours antérieurs diversifiés, parcours qui leur ont permis d'atteindre des niveaux de connaissances et de compétences variés, le premier semestre a pour fonction d'assurer une transition efficace entre l'enseignement scolaire et l'enseignement supérieur, d'éclairer les choix à venir en termes d'orientation, d'engager l'étudiant dans un rythme de travail plus soutenu et d'assurer la cohésion de chaque division. Á ces fins, le premier semestre doit assurer les mises à niveau nécessaires et permettre d'acquérir les méthodes de travail et d'organisation ainsi que les capacités d'initiative indispensables aux études supérieures. Il se traduit par un suivi personnalisé des étudiants qui doivent se sentir accompagnés et soutenus par l'équipe pédagogique : l'information sur les parcours de formation et les perspectives qu'ils ouvrent les aide à donner un sens concret aux études dans lesquelles ils s'engagent et renforce leur motivation ; la mise en évidence des relations culturelles, intellectuelles et méthodologiques entre les disciplines, et l'initiation aux démarches de documentation et de recherche contribuent à les faire entrer dans une dynamique de formation ; l'attention portée à leurs éventuelles difficultés et à leurs progrès permet d'accompagner aux mieux leur effort et de leur donner confiance en eux-mêmes. Pour assurer cet accompagnement individualisé, les heures d'interrogations orales peuvent également être mises à profit et faire l'objet, en tant que de besoin, d'une répartition appropriée.
C'est à ces conditions que les étudiants pourront s'engager dans un parcours de réussite et exprimer leur véritable potentiel, qui peut se révéler, dès la fin du premier semestre, assez sensiblement différent de celui qui a été mesuré à l'issue des études secondaires.

Les objectifs de la formation

Les objectifs généraux de la formation en classe de lettres première année, à l'atteinte desquels contribuent toutes les disciplines, obéissent notamment aux principes suivants :

- assurer aux étudiants une culture générale solide dans les disciplines du champ des lettres, des langues et des sciences humaines ;
- faire lire des textes de référence ;
- améliorer les compétences d'expression écrite et orale ;
- faire prendre conscience des liens entre les disciplines ;
- faire acquérir des méthodes de travail rigoureuses et efficaces ;
- développer l'aptitude à rechercher, à traiter et à utiliser de manière pertinente l'information, et à se servir des instruments et des ressources numériques dans une perspective de construction, d'appropriation et de partage des connaissances ;
- développer l'autonomie intellectuelle des étudiants ;
- permettre aux étudiants de mener des recherches personnelles et collectives en exerçant leur esprit critique ;
- stimuler chez eux la curiosité intellectuelle et éveiller le plaisir de l'étude.

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière **: littéraire**

Voie **: A/L**

Discipline **: Langues et culture de l'Antiquité**

Première année

Langues et culture de l’Antiquité

Objectifs de formation

L’enseignement des langues et culture de l’Antiquité en classe préparatoire de lettres première année a pour objectif de donner accès à un ensemble de références à travers la lecture de textes anciens et de légitimer le rôle mémoriel, culturel, fédérateur des langues anciennes pour les pratiquer, les décrire et les inscrire dans le présent de notre culture. L’enjeu est de faire en sorte que les étudiants s’approprient une culture qui ne doit pas être réservée à des spécialistes. Le premier semestre, en particulier, doit permettre la découverte de ce champ nouveau. Cela suppose :

- de répondre au souci d’une culture large et exigeante, à la fois contemporaine et consciente de ses racines ;
- de conduire les étudiants à acquérir un ensemble de savoirs, de méthodes et de compétences, indispensable à la poursuite des études envisagées.

Méthodes et compétences

Dans son principe, l’enseignement visera à favoriser la connaissance et l’analyse des concepts fondamentaux propres à la littérature et à la culture de l’Antiquité. Cela implique d’opérer, à travers une connaissance minimale de mécanismes linguistiques différents, un retour sur sa propre langue afin de mieux la maîtriser, notamment par :

- la pratique de la traduction, en lui restituant sa dimension interculturelle. Traduire sera une expérience de découverte, une activité formatrice et un exercice critique qui ouvrira sur l’interprétation des textes et de l’écriture ;
- la comparaison de traductions différentes d’un même texte qui permettra de faire apparaître ce qui dans un texte original demande une interprétation et ouvre le débat ;
- la pratique du commentaire. Elle suppose la prise en compte de démarches nouvelles dans le cadre d’une approche pluridisciplinaire (littéraire, historique, anthropologique, philologique, philosophique...). Cet enseignement qui ressortit naturellement au champ des lettres, suppose la prise en compte d’une approche fortement interdisciplinaire, ouvrant par ailleurs à la démarche de recherche. Cet espace de convergences disciplinaires doit donc mettre en synergie l’histoire, la philosophie et la langue avec la littérature.

À cet enseignement peuvent s’ajouter, selon le souhait des étudiants, des enseignements de spécialité en latin et en grec (niveau confirmé ou débutant).

Dans le cadre de la définition des programmes de langues et culture de l’Antiquité en classe de lettres première année non déterminante, il importe que la problématique mise au programme permette d’aborder la façon dont la culture antique a contribué à la construction de la culture moderne.

Les notions juridiques, institutionnelles, politiques, religieuses, littéraires, particulièrement celles qui ressortissent au champ de la poétique et de la rhétorique, seront principalement analysées lors de l’étude des textes, donnés à titre indicatif et liés aux problématiques mises au programme. Il apparaît souhaitable de rattacher, quand cela est possible, l’étude des notions à la présentation de genres littéraires correspondants et d’opérer les rapprochements qui s’imposent entre le domaine grec et le domaine latin. Enfin, des rapprochements avec la littérature française sont également recommandés. Il convient aussi, pour enrichir les parcours à travers les textes, d’amener les étudiants à se familiariser avec les représentations figurées des grands mythes et des personnages, liées à la problématique retenue, qu’elles relèvent de l’art ou de l’artisanat.

Organisation annuelle et semestrialisation

L’enseignant établira une progression annuelle organisée en deux semestres.

Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures.

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

- Pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l’acquisition des connaissances et des capacités est d’autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d’initiative et l’autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes favorise cette mise en activité ;
- Didacticien, il choisit le contexte favorable à l’acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective avec les autres disciplines est régulièrement sollicitée.

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière **: littéraire**

Voie **: A/L**

Discipline **: Français**

Première année

Français

Objectifs de formation

L'enseignement du français en classe de lettres supérieures a pour objectif d'étendre, de consolider et de structurer les connaissances acquises dans les classes secondaires afin de constituer, par l'intensification des lectures et la pratique systématique des exercices de l'explication, du commentaire et de la dissertation, une culture littéraire fondamentale pour les étudiants, quelle que soit leur spécialisation ultérieure. L'étude des lettres, par son objet et ses méthodes, a donc d'abord un sens culturel : elle permet d'asseoir et d'éclairer, par le travail sur les textes et les œuvres, les références littéraires majeures du patrimoine, de faire prendre conscience de leur historicité, de faire réfléchir aux constantes et aux variations esthétiques et génériques des représentations.

Méthodes et compétences

La première année, et particulièrement le premier semestre, doivent également favoriser l'acquisition de méthodes de travail nécessaires pour aborder la formation ultérieure, en particulier la préparation des concours. Le souci d'apprentissage méthodologique vise à faire acquérir la maîtrise des différents exercices types, écrits et oraux, ainsi que la capacité à consolider un savoir dans la durée. Le professeur veille à développer tout particulièrement l'acquisition des compétences d'analyse et d'interprétation des textes littéraires et la capacité à construire une argumentation écrite.

Les professeurs restent libres, en première année, de leur programme et de leurs démarches. On peut cependant souligner qu'en tant que discipline, l'enseignement des lettres obéit à une logique historique et à une logique générique en fonction d'un projet annuel décliné en deux semestres.

● Dans la mesure où il s'agit de permettre aux étudiants de construire une culture littéraire ordonnée et d'enrichir par la lecture leur connaissance du monde et de l'homme, il apparaît nécessaire de prendre en compte dans cet enseignement des éléments d'histoire littéraire et d'histoire des idées. L'étude des œuvres comme représentations, la mise en évidence des continuités et des ruptures esthétiques, les notions de mouvement littéraire et culturel, de filiation et d'influence, les formes de l'intertextualité, la production et la réception des textes s'inscrivent dans cette mise en perspective historique qui est partie prenante de l'enseignement des lettres et qui invite à la création de relations avec les autres disciplines. Ainsi peut se développer chez les étudiants le sens de l'unité intellectuelle des démarches et des connaissances, indispensable à une spécialisation ultérieure fertile.

● L'enseignement du français en classe de lettres première année vise également à cultiver et à informer la lecture des œuvres en faisant acquérir aux étudiants les connaissances indispensables en matière de poétique des genres et de stylistique. Il s'agit d'approfondir la conscience qu'ils peuvent avoir des caractéristiques et des problèmes spécifiques du roman, du théâtre, de la poésie et de l'essai, afin qu'une étude approfondie des œuvres puisse leur permettre de mesurer la singularité, l'écart ou le jeu qui marquent l'écriture de tel écrivain ou de telle école. Ces connaissances acquises en matière de poétique et de stylistique doivent permettre aux étudiants de parvenir à une lecture problématisée des textes, à une interprétation résultant d'un questionnement pertinent et fondé sur une analyse à la fois cohérente, précise et consciente de ses enjeux.

Cette problématisation unifie les exercices pratiqués en lettres, à l’écrit ou à l’oral, dans ces classes :

- l’explication de texte ;
- le commentaire composé ;
- la dissertation, portant sur une œuvre particulière ou sur une question de littérature générale.

Ces diverses formes de travail ont en effet pour objet de permettre aux étudiants de s’approprier la culture qu’ils acquièrent et de cultiver les qualités de rigueur, de précision et de réflexion qu’ils auront à mettre en œuvre dans la suite de leurs études, quelles qu’elles soient.

Organisation annuelle et semestrialisation

L’enseignant établira une progression annuelle organisée en deux semestres.
Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures.
Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

- Pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l’acquisition des connaissances et des capacités est d’autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d’initiative et l’autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes favorise cette mise en activité ;
- Didacticien, il choisit le contexte favorable à l’acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective avec les autres disciplines est régulièrement sollicitée.

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **littéraire**

Voie : **A/L**

Discipline : **Philosophie**

Première année

Philosophie

Objectifs de formation

Le cours de lettres première année permet de consolider le travail commencé en classe terminale, dont le double objectif a conduit à favoriser l'exercice réfléchi du jugement et l'acquisition d'une culture philosophique initiale. Il s'agit donc de poursuivre l'effort de réflexion et de lecture, et d'affermir la maîtrise des exercices de dissertation et d'explication de textes inaugurés l'année précédente. Les élèves seront ainsi en mesure d'accéder au bon usage de l'abstraction, à la position rigoureuse de problèmes précis et à leur traitement argumenté, progressif et cohérent.

Méthodes et compétences

En classe de lettres première année, se familiariser avec la démarche philosophique ne suffit plus. Il faut :

- entrer plus avant dans la philosophie effective par un travail approfondi sur les concepts et par l'étude de quelques œuvres majeures de la tradition ;
- permettre aux étudiants l'acquisition d'une connaissance claire des enjeux, des grandes interrogations, et de textes fondateurs correspondant aux divers domaines structurant le programme selon les deux axes de la connaissance et de l'action.

Les travaux fondamentaux qui regroupent en effet de manière synthétique, s'ils sont réussis, des compétences essentielles et variées que l'on peut expliciter, et qui témoignent directement du travail de lecture et de réflexion entrepris par leurs auteurs, demeurent :

- la dissertation ;
- l'explication de texte ;
- les exercices oraux qui leur correspondent.

Les étudiants doivent donc être capables de faire une dissertation et une explication de texte en satisfaisant aux critères suivants, qui constituent de véritables compétences disciplinaires :

- respect rigoureux des sujets et des thématiques proposés ;
- position d'un problème précis, cernant exactement le sujet, et exposition des modalités de sa résolution ;
- construction d'une progression dialectique cohérente ;
- analyses argumentées et précises, sans contradiction interne, et articulées les unes aux autres ;
- utilisation pertinente des concepts ;
- capacité spéculative et rigueur démonstrative ;
- mobilisation adéquate des références philosophiques et culturelles pour faire avancer la réflexion ;
- réflexion philosophique d'une certaine ampleur sur des documents ou matériaux non philosophiques ; les étudiants doivent s'intéresser au réel dans sa diversité tout en refusant la pure description.

S'agissant plus particulièrement de l'étude et de l'explication des textes, on valorisera :

- la capacité de mettre le texte en perspective afin d'en dégager tout l'intérêt spécifique ;
- le refus de la paraphrase et du catalogue doxographique ;
- l'acquisition du goût pour la lecture des textes philosophiques, et la pratique de la lecture lente et active, seul moyen de faire des progrès dans la discipline et de s'y intéresser durablement ;
- l'attention systématique portée aux conditions de formulation et aux conséquences logiques de toutes les thèses examinées.

Cette formation repose à l'évidence sur des connaissances, ce qui rend indispensable la définition de contenus. Plutôt que d'arrêter un “programme” *stricto sensu*, il convient de fixer un cahier des charges. Afin d'atteindre les objectifs pédagogiques précédemment définis et de préparer la seconde année de la classe de lettres, les élèves de première année étudieront, sous la conduite de leur professeur :

- des notions, questions ou problèmes respectivement liés aux six domaines de la métaphysique, de la science, de la politique et du droit, de la morale, des sciences humaines : homme, langage, société, de l'art et de la technique (les deux premiers se situant dans l'axe de la connaissance, les quatre autres dans celui de l'action) ;
- deux œuvres dans leur continuité, l'une de philosophie ancienne ou médiévale, l'autre de philosophie moderne ou contemporaine.

Organisation annuelle et semestrialisation

L'enseignant établira une progression annuelle organisée en deux semestres.

Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures.

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

- o Pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes favorise cette mise en activité ;
- o Didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective avec les autres disciplines est régulièrement sollicitée.

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **littéraire**

Voie : **A/L**

Discipline : **Histoire**

Première année

Histoire

Objectifs de formation

L'enseignement de l'histoire en classe préparatoire de lettres première année a pour objectif de permettre aux étudiants d'acquérir les bases d'une culture générale historique solide. Cette acquisition suppose que l'intérêt des étudiants et leur curiosité pour l'histoire soient stimulés. L'histoire doit leur apparaître comme une discipline vivante, suscitant leur curiosité intellectuelle, leur goût pour la lecture d'œuvres historiques et leur offrant le plaisir sans cesse renouvelé de la découverte.

Méthodes et compétences

Cette acquisition implique également la maîtrise de capacités inhérentes à cette discipline. Son enseignement doit :

- donner aux étudiants l'occasion d'exercer leur esprit critique ;
- favoriser leur ouverture d'esprit, notamment en dégageant, chaque fois que possible, des perspectives culturelles et en établissant, si nécessaire, des liens avec d'autres disciplines ;
- leur donner des éclairages sur la façon dont on écrit l'histoire, notamment en leur présentant des exemples de débats historiographiques et en les initiant à ce qu'est la recherche historique ;
- leur permettre de maîtriser l'exercice de la dissertation historique ;
- être l'occasion de se familiariser avec différents types de documents historiques ;
- permettre aux étudiants d'améliorer leur expression orale ;
- renforcer leur autonomie et leur capacité à mener des recherches personnelles et collectives.

Les professeurs doivent prendre en compte ces différents objectifs dans leurs pratiques et leurs évaluations. Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition lycée/enseignement supérieur.
Les étudiants doivent être initiés dès la classe préparatoire de lettres première année à différents champs de l'histoire (économique et social, politique, religieux et culturel). L'acquisition d'une culture générale historique se fera donc à travers l'étude de grandes questions formatrices puisées dans différentes périodes. Il convient d'aborder, au cours de l'année, des questions concernant au moins trois des quatre périodes historiques (ancienne, médiévale, moderne et contemporaine). Ces questions pourront être traitées selon des modalités pédagogiques diverses : une des questions pourrait faire l'objet de travaux de recherche encadrés par le professeur, débouchant sur l'élaboration d'un court mémoire écrit pouvant donner lieu à une présentation orale.

Organisation annuelle et semestrialisation

L'enseignant établira une progression annuelle organisée en deux semestres.
Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures.

La programmation peut accorder un horaire d'enseignement variable aux différentes questions. Au terme des deux années d'études en classes préparatoires de lettres première année et seconde année, les étudiants qui se destinent à des études d'histoire doivent avoir traité des questions concernant les quatre périodes historiques.
Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

- Pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes favorise cette mise en activité ;
- Didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective avec les autres disciplines est régulièrement sollicitée.

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière **: littéraire**

Voie **: A/L**

Discipline **: Géographie**

Première année

Géographie

Objectifs de formation

L'enseignement de la géographie en classe préparatoire de lettres première année a pour objectif de permettre aux étudiants d'acquérir les bases d'une culture générale géographique solide et, pour les optionnaires, de se préparer aussi à la poursuite d'études universitaires. L'acquisition de cette culture géographique suppose que l'intérêt des étudiants et leur curiosité pour la géographie soient stimulés. La géographie doit être enseignée comme une discipline vivante permettant de décrypter les enjeux du monde actuel et l'organisation spatiale produite par les sociétés.

Méthodes et compétences

Cette acquisition d'une culture géographique solide implique également la maîtrise de capacités inhérentes à cette discipline. L'enseignement de la géographie doit :

- préciser les objets et méthodes de la géographie ;
- amener les étudiants à cerner la spécificité de l'analyse géographique et ses liens avec les autres disciplines ;
- les former à raisonner en termes d'interaction et d'approche systémique, et à prendre en compte les différentes échelles de l'organisation des territoires ;
- favoriser l'acquisition d'outils conceptuels et l'exercice de l'esprit critique ;
- leur donner des éclairages sur la façon dont on écrit la géographie, notamment en leur donnant de grands repères épistémologiques et en les initiant à la recherche dans la discipline ;
- être l'occasion de les familiariser avec les différents types de documents utilisés en géographie ;
- favoriser l'usage des outils et des ressources numériques ;
- permettre de maîtriser les exercices fondamentaux de la discipline : analyse de documents et de dossiers documentaires, rédaction de dissertations, production de représentations graphiques et cartographiques ;
- permettre aux étudiants d'améliorer leur expression orale ;
- renforcer leur autonomie et leur capacité à mener des recherches personnelles et collectives.

Les professeurs doivent prendre en compte ces différents objectifs dans leurs pratiques et leurs évaluations. Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition lycée/enseignement supérieur.

Les étudiants doivent être initiés dès la classe préparatoire de lettres première année aux différents champs de la géographie (environnementaux, économiques, sociaux, culturels, géopolitiques...) à partir d'exemples territoriaux et d'études de cas à différentes échelles, du local au mondial. L'acquisition d'une culture générale géographique se fera à travers l'étude de grandes questions formatrices puisées dans différents domaines géographiques où une part significative sera réservée à l'étude de territoires français à différentes échelles (y compris l'outre-mer). Ces questions pourront être traitées selon des modalités pédagogiques diverses. Leur enseignement s'appuiera sur l'analyse et la production de documents variés, en particulier cartographiques.

Organisation annuelle et semestrialisation

L'enseignant établira une progression annuelle organisée en deux semestres.
Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures.
La programmation peut accorder un horaire d'enseignement variable aux différentes questions. En option, la formation privilégiera un approfondissement de l'apprentissage des concepts et des démarches de la géographie. Elle les préparera au commentaire de dossiers documentaires, et plus particulièrement de cartes. Au terme des deux années d'étude en classes préparatoires de lettres première année et seconde année, les étudiants qui se destinent à des études de géographie doivent avoir traité des questions leur donnant les bases cognitives, conceptuelles et méthodologiques indispensables à une poursuite d'études universitaires.
Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

- Pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes favorise cette mise en activité ;
- Didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective avec les autres disciplines est régulièrement sollicitée.

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **littéraire**

Voie : BEL
(ENS Ulm A/L et ENS de Lyon)

Programmes de 2ème année

1 - Littérature française

Programme commun 2024-2025 BEL (ENS Ulm A/L et ENS de Lyon) :

La dissertation littéraire porte sur un sujet impliquant les questions mises au programme et requérant la connaissance des œuvres qui y figurent.
Les candidats doivent nourrir leur réflexion de l'étude approfondie de ces œuvres et soutenir leur argumentation grâce à des références à celles-ci rigoureusement appropriées au sujet proposé. Ils sont invités à faire appel aussi à d'autres références tirées de leur culture littéraire personnelle.

Axe 1 : Genres et mouvements
— Domaine 1 : le roman.

Axe 2 : Questions
— Domaine 1 : l'oeuvre littéraire, ses propriétés, sa valeur ;
— Domaine 2 : l'oeuvre littéraire et l'auteur.

OEuvres

GUILLERAGUES, Lettres portugaises, éd. A. Brunn, Flammarion, coll. « GF », 2009, ISBN : 978-2-0812-1965-6 ;
BERNARDIN de SAINT-PIERRE, Jacques-Henri, Paul et Virginie, éd. J.-M. Racault, Le Livre de Poche, coll. « Classiques », 2019, ISBN : 9782253240280 ;
FLAUBERT, Gustave, Madame Bovary, éd. G. Séginger, Flammarion, coll. « GF », 2024, ISBN: 9782081216129 ;
DURAS, Marguerite, Le ravissement de Lol V. Stein, Folio, 1976, ISBN : 9782070368105.

ou *

2- Philosophie

Programme commun 2024-2025 BEL (ENS Ulm A/L et ENS de Lyon) :
La morale

* Le jour de l'épreuve, les candidats doivent choisir entre la dissertation littéraire ou la dissertation philosophique

3 - Histoire ou Géographie

Histoire :

Programme commun 2024-2025 BEL (ENS Ulm A/L et ENS de Lyon) :
Exilés, réfugiés, étrangers en France (1848-1986)

ou *

Géographie :

Programme 2024-2025 ENS Ulm A/L :

- Pour les candidats optionnaires de géographie :
  La Méditerranée.
- Pour les candidats optionnaires d'histoire :
  La géographie de la France

Programme 2024-2025 ENS de Lyon :
L'eau, étude géographique

4 - Langue et culture anciennes (latin et grec) Mesure et excès

* Les candidats doivent choisir entre l'épreuve d'histoire ou de géographie lors de l'inscription

La Banque Commune d'Épreuves
des écoles de management est gérée par la Direction des Admissions et Concours
de la Chambre de commerce et d'industrie de région Paris Ile-de-France

CCI PARIS ILE-DE-FRANCE

DAC DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS