

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES 1

(conçu par l'ESSEC)

n et p sont deux entiers naturels, $n \geq 2$ et $p \geq 1$.

Pour tout entier naturel non nul k :

- on identifie chaque élément de \mathbb{R}^k à la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique.
- on identifie chaque endomorphisme de \mathbb{R}^k à sa matrice dans la base canonique.
- on rappelle que si X et Y sont deux éléments de \mathbb{R}^k , le produit scalaire canonique de X et Y vaut tXY où tX désigne la transposée de X .

On utilise les notations suivantes :

- \mathcal{S}_n désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n symétriques réelles, et \mathcal{H}_n le sous-ensemble de \mathcal{S}_n formé des matrices dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
- U_n est le vecteur colonne de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes valent 1 et $H_n = I_n - \frac{1}{n}U_n {}^tU_n$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n .
- **Dans tout le problème**, si $A \in \mathcal{H}_n$ et est d'élément générique $a_{i,j}$, c'est à dire $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on notera :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{i,k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{k,i} \text{ et } a = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

- On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{H}_n$ d'élément générique $a_{i,j}$ est **une matrice euclidienne, de type (n, p)** , s'il existe n vecteurs X_1, \dots, X_n de \mathbb{R}^p tels que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = \|X_i - X_j\|^2$$

la norme étant la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^p .

- On dit alors que les vecteurs X_1, \dots, X_n sont associés à A et réciproquement.
- On notera $\mathcal{E}_{n,p}$ l'ensemble des matrices euclidiennes de type (n, p) et \mathcal{E}_n la réunion des ensembles $\mathcal{E}_{n,p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

On admet que $\dim(\mathcal{S}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ et que si l'on note \mathcal{D}_n le sous-espace vectoriel de \mathcal{S}_n des matrices diagonales, $\dim(\mathcal{D}_n) = n$.

L'objet du problème est d'établir une caractérisation des matrices euclidiennes qui sont utilisées en analyse de données.

Partie I - Une application linéaire de \mathcal{H}_n dans \mathcal{S}_n

1. a) Montrer que \mathcal{H}_n est un sous-espace vectoriel de \mathcal{S}_n et que $\mathcal{S}_n = \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{D}_n$.
- b) En déduire la dimension de \mathcal{H}_n .
2. a) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\frac{1}{n}U_n {}^tU_n X$ est la projection orthogonale de X sur $\text{Vect}(U_n)$, le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par U_n .
- b) En déduire que H_n est le projecteur orthogonal sur $(\text{Vect}(U_n))^\perp$.
- c) H_n est-elle inversible? Quel est le rang de H_n ?

On définit l'application Φ de \mathcal{H}_n dans \mathcal{S}_n par : $\forall A \in \mathcal{H}_n, \Phi(A) = -\frac{1}{2}H_n A H_n$.

3. Vérifier que Φ est bien définie et qu'elle est linéaire.
4. Écrire une fonction Python `Phi(A)` qui retourne $\Phi(A)$ lorsque le tableau numpy `A` représente la matrice A .

On supposera avoir importé `numpy` avec l'instruction `import numpy as np`.

Que renvoie `Phi(np.array([[0,2],[2,0]])`?

5. a) Quels sont les coefficients de la matrice H_n ?
- b) Soit $A = (a_{i,j})$ appartenant à \mathcal{H}_n et $a'_{i,j}$ l'élément générique de la matrice AH_n . Établir pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, l'égalité : $a'_{i,j} = a_{i,j} - a_i$.
- c) En déduire que $b_{i,j}$, l'élément générique de $\Phi(A)$, vérifie :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, b_{i,j} = \frac{1}{2}(a_i + a_j - a_{i,j} - a)$$

- d) *Un exemple.* Calculer $\Phi(A)$ si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Soit $A \in \ker(\Phi)$ d'élément générique $a_{i,j}$.
 - a) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = \frac{a}{2}$.
 - b) En déduire que $a = 0$ puis que A est la matrice nulle.
 - c) Que peut-on en déduire pour Φ ?
7. On considère l'ensemble \mathcal{K}_n des matrices M de \mathcal{S}_n telle que $MU_n = 0$.
 - a) Montrer que $\text{Im}(\Phi) \subset \mathcal{K}_n$.
 - b) Montrer que \mathcal{K}_n et \mathcal{D}_n sont en somme directe.
 - c) En déduire que $\dim(\mathcal{K}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$ et que $\text{Im}(\Phi) = \mathcal{K}_n$.

Partie II - Propriétés des matrices euclidiennes

Dans cette partie, $A = (a_{i,j})$ appartient à $\mathcal{E}_{n,p}$ et est associée aux vecteurs X_1, \dots, X_n appartenant à \mathbb{R}^p .

On démontre dans cette partie que $\Phi(A)$ ne possède que des valeurs propres positives parmi lesquelles se trouve 0.

8. *Un exemple lorsque $n = 3$.*

A est la matrice associée aux vecteurs : $X_1 = {}^t(1 \ 0 \ 1)$, $X_2 = {}^t(1 \ 1 \ 0)$ et $X_3 = {}^t(1 \ 1 \ 1)$. Déterminer A , $\Phi(A)$, puis les valeurs propres de $\Phi(A)$.

9. *Un autre exemple.* Dans cette question A a tous ses coefficients non diagonaux qui valent 1.

a) En utilisant une base orthonormée de \mathbb{R}^n , montrer que A appartient à $\mathcal{E}_{n,n}$.

b) Si $b_{i,j}$ désigne l'élément générique de $\Phi(A)$, montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $b_{i,j} = \begin{cases} -\frac{1}{2n} & \text{si } i \neq j \\ \frac{n-1}{2n} & \text{si } i = j \end{cases}$.

c) En déduire que $\Phi(A) = \frac{1}{2}H_n$ puis que $\text{rg}(\Phi(A)) = n - 1$ et $\text{Sp}(\Phi(A)) = \{0, \frac{1}{2}\}$.

10. Montrer que pour tout entier $k \geq p$, $A \in \mathcal{E}_{n,k}$.

11. a) Montrer que pour tout vecteur $Y \in \mathbb{R}^p$, les vecteurs $X_1 - Y, \dots, X_n - Y$ sont aussi associés à A .

b) En déduire que l'on peut choisir les X_i de sorte qu'ils soient associés à A et vérifient : $\sum_{i=1}^n X_i = 0$ (1).

On suppose dans la suite de cette partie que cette relation (1) est vérifiée.

c) Exprimer $a_{i,j}$ en fonction de $\|X_i\|^2$, $\|X_j\|^2$ et tX_iX_j . En déduire que :

$$a_i = \|X_i\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|X_j\|^2, \text{ puis que } a = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \|X_j\|^2$$

d) On note $b_{i,j}$ l'élément générique de $\Phi(A)$. En utilisant la question 5.c), établir l'égalité :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad b_{i,j} = {}^tX_iX_j.$$

puis que, si l'on note X la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont X_1, \dots, X_n , on a $\Phi(A) = {}^tXX$.

e) Montrer que $\text{rg}(\Phi(A)) = \text{rg}(X)$ et en déduire que $\text{rg}(\Phi(A)) \leq p$.

12. Montrer que les valeurs propres de $\Phi(A)$ sont positives ou nulles et que 0 est une de ces valeurs propres.

Partie III - Caractérisation de Schönberg-Young-Householder des matrices euclidiennes

On considère dans les questions 13 et 14 cette partie $A \in \mathcal{H}_n$.

On note alors $G = \Phi(A)$, $p = \text{rg}(G)$ et on suppose que $\text{Sp}(G) \subset \mathbb{R}^+$ et $p \neq 0$.

On démontre que sous ces hypothèses A est euclidienne. On établit ensuite une caractérisation des matrices euclidiennes.

13. a) Montrer qu'il existe des réels strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et une matrice orthogonale P tels que $G = P\Delta^2({}^tP)$ où Δ est la matrice diagonale dont les p premiers éléments diagonaux sont $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et les autres coefficients sont nuls.

b) Montrer que les $n - p$ dernières lignes de $\Delta {}^tP$ sont nulles.

c) On considère X la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont les lignes sont les p premières lignes de $\Delta {}^tP$. Montrer que $G = {}^tXX$.

14. On note X_j la j -ème colonne de X .

a) Montrer que l'élément générique de G est tX_iX_j .

b) En utilisant que $GU_n = 0$, en déduire que $\sum_{j=1}^n X_j = 0$.

c) En conclure que A est la matrice euclidienne associée aux points X_1, \dots, X_n et que $A \in \mathcal{E}_{n,p}$.

15. a) En utilisant les résultats de la partie 2 et ceux de cette partie, démontrer que l'on a, pour toute $A \in \mathcal{H}_n$, l'équivalence suivante :

$$A \in \mathcal{E}_n \text{ si et seulement si } \text{Sp}(\Phi(A)) \subset \mathbb{R}^+$$

et que, si $A \in \mathcal{E}_n$ n'est pas la matrice nulle, $p = \text{rg}(\Phi(A))$ est la valeur minimale de p pour laquelle on a $A \in \mathcal{E}_{n,p}$.

b) En déduire que $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n,n-1}$.

c) *Application.* En utilisant la matrice de la question 9 et le résultat précédent, montrer que dans \mathbb{R}^{n-1} , il existe n vecteurs X_1, \dots, X_n tels que $\|X_i - X_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$ mais pas $n + 1$ ou plus.

16. On importe la bibliothèque `linalg` de `numpy` en exécutant, `import numpy.linalg as al` et on saisit une matrice `A` qui représente une matrice de \mathcal{H}_n .

Donner une expression Python comportant `Phi(A)` et la fonction `al.eig` qui vaut `True` lorsque `A` représente une matrice euclidienne et `False` sinon.

17. Soit $M \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$ si et seulement si pour tout élément X de \mathbb{R}^n , ${}^tXMX \geq 0$.

En déduire que, pour toute $A \in \mathcal{H}_n$:

$$A \in \mathcal{E}_n \text{ si et seulement si pour tout vecteur } X \in \mathbb{R}^n, {}^tX\Phi(A)X \geq 0.$$

18. Dans cette question, on suppose comme dans la question 5.d) que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Montrer que ${}^tX\Phi(A)X = \frac{1}{3}(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 4yz)$.

b) En déduire que A est euclidienne.

Partie IV - Une condition nécessaire et une condition suffisante utilisant la trace

On établit dans cette partie une condition nécessaire et une condition suffisante, assez faciles à vérifier, pour qu'une matrice de \mathcal{H}_n soit euclidienne.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n$ semblable à une matrice diagonale dont les valeurs propres non nulles sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ où $r \geq 1$, on pose :

$$m = \frac{\text{Tr}(M)}{r} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \lambda_k \text{ et } s = \sqrt{\frac{\text{Tr}(M^2)}{r} - m^2}$$

19. Soit $M \in \mathcal{S}_n$. On pose $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$ et on rappelle que $U_r = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $m = \frac{1}{r} {}^tU_r\Lambda$ puis que $m^2 \leq \frac{\text{Tr}(M^2)}{r}$. En déduire que la définition de s est toujours possible.

b) Montrer que $s^2 = \frac{1}{r} {}^t\Lambda H_r \Lambda$, où $H_r = I_r - \frac{1}{r} U_r {}^tU_r$.

c) Soit $Y \in \mathbb{R}^r$, montrer que :

$$\left| {}^tY H_r \Lambda \right| \leq \sqrt{{}^tY H_r Y} \sqrt{{}^t\Lambda H_r \Lambda}$$

en déduire que :

$$-s\sqrt{r}\sqrt{{}^tY H_r Y} \leq {}^tY H_r \Lambda \leq s\sqrt{r}\sqrt{{}^tY H_r Y}$$

d) On suppose que Y est le r -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^r .

Montrer que ${}^tY H_r Y = \frac{r-1}{r}$ et ${}^tY H_r \Lambda = \lambda_r - m$.

En déduire que :

$$\lambda_r \geq m - s\sqrt{r-1}$$

e) Montrer que : $r^2(m - \lambda_r)^2 \geq \sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)^2$ et que $\sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)^2 = rs^2 + r(m - \lambda_r)^2$.

En conclure que si $r \geq 2$:

$$\lambda_r \leq m - \frac{s}{\sqrt{r-1}}$$

20. On suppose, dans cette question, que $n \geq 3$ et l'on considère $A \in \mathcal{H}_n$.

On utilise les notations de la question précédente avec $M = -H_n A H_n = 2\Phi(A)$, en supposant que le rang de M , noté r , est supérieur ou égal à 1.

a) Montrer que $m = \frac{1}{nr} {}^t U_n A U_n$ et que $s^2 = \frac{1}{r} \text{Tr}(A^2) - \frac{2}{nr} {}^t U_n A^2 U_n + (r-1)m^2$.

b) Montrer que si A est euclidienne alors $\frac{2}{n} {}^t U_n A^2 U_n \geq \text{Tr}(A^2)$.

c) On rappelle que $r \leq n-1$. Montrer que si l'on a,

$$\frac{2}{n} {}^t U_n A^2 U_n - \frac{n-3}{n^2(n-2)} ({}^t U_n A U_n)^2 \geq \text{Tr}(A^2)$$

alors A est euclidienne.

21. Exemples

a) On suppose dans cette question que $n = 3$ et $A \in \mathcal{H}_3$.

Montrer que $A \in \mathcal{E}_3$ si et seulement si $\frac{2}{3} {}^t U_3 A^2 U_3 \geq \text{Tr}(A^2)$. En déduire pour quelles valeurs de a , la

matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est euclidienne.

b) Montrer que la matrice de la question 9 satisfait la condition suffisante de la question 20.c).

22. Écrire une fonction Python `CsEuclidienne(A)` qui renvoie `True` si A , représentant une matrice de symétrique à élément diagonaux tous nuls, vérifie la condition suffisante de la question 20.c) et `False` sinon.

Un corrigé

Partie I - Une application linéaire de \mathcal{H}_n dans \mathcal{S}_n

1. a) La vérification est immédiate pour établir que \mathcal{H}_n est un sous espace vectoriel de \mathcal{S}_n .

De plus, si $A \in \mathcal{S}_n$, alors en notant D la matrice diagonale ayant la même diagonale que A et B la matrice identique à A sauf pour ses éléments diagonaux qui sont tous nuls, alors $A = B + D$ et cette écriture est unique.

En effet si $A = B' + D'$ avec D' diagonale et $B' \in \mathcal{H}_n$ alors $D - D' = B' - B$, donc $B' - B = 0$ car elle est diagonale à diagonale nulle, et ainsi $D - D' = 0$. Finalement $B = B'$ et $D = D'$.

b) On a alors : $\dim(\mathcal{H}_n) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ d'où $\dim(\mathcal{H}_n) = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$.

2. a) Déterminons la matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(U_n)$.

Puisque $V = \frac{1}{\sqrt{n}}U_n$ est une base orthonormée de $\text{Vect}(U_n)$, alors on sait d'après le cours que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, la projection orthogonale de X sur $\text{Vect}(U_n)$ vaut : $({}^tVX)V = V({}^tVX) = \frac{1}{n}U_n {}^tU_n X$.

D'où la matrice dans la base canonique de ce projecteur est $\frac{1}{n}U_n {}^tU_n$.

b) On sait alors que $H_n = I_n - \frac{1}{n}U_n {}^tU_n$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(U_n)^\perp$.

c) On a $\ker(H_n) = \text{Vect}(U_n)$ qui est de dimension 1, d'où H_n n'est pas inversible. $\text{Im}(H_n) = \text{Vect}(U_n)^\perp$ d'où $\text{rg}(H_n) = n - 1$.

3. La linéarité est immédiate. D'autre part, ${}^t\Phi(A) = -\frac{1}{2}{}^t(H_n A H_n) = -\frac{1}{2}{}^t H_n {}^t A {}^t H_n = -\frac{1}{2} H_n A H_n$ car A et H_n sont symétriques.

4. def phi(A):

```
n=np.shape(A)[0]
Un=np.ones((n,1))
Vn=np.dot(Un,np.transpose(Un))
In=np.eye(n,n)
Hn=In+(-1/n)*Vn
return (-1/2)*np.dot(Hn,np.dot(A,Hn))
```

un calcul rapide montre que $\text{Phi}(\text{np.array}([[0,2],[2,0]]))$ renvoie $\text{array}([[0.5,-0.5],[-0.5,0.5]])$.

5. a) La matrice $U_n {}^tU_n$ a tous ses coefficients qui valent 1 d'où on en déduit que

les éléments diagonaux de H_n valent tous $1 - \frac{1}{n}$ et les non diagonaux $-\frac{1}{n}$.

b) Si l'on note $h_{i,j}$ l'élément générique de H_n , alors on a : $a'_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} h_{k,j} = a_{i,j} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1, k \neq j}^n a_{i,k}$,

i.e. $a'_{i,j} = a_{i,j} - a_i$

c) En réutilisant les notations précédentes, on a : $b_{i,j} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n h_{i,k} a'_{k,j} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) a'_{i,j} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1, k \neq i}^n a'_{k,j}$.

Ainsi on a :

$$b_{i,j} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) (a_{i,j} - a_i) + \frac{1}{2n} \sum_{k=1, k \neq i}^n (a_{k,j} - a_k) = \frac{1}{2} (a_i - a_{i,j}) + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (a_{k,j} - a_k)$$

Or $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_{k,j} - a_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{k,j} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a_j - a$. D'où finalement :

$$b_{i,j} = \frac{1}{2}(a_i + a_j - a_{i,j} - a)$$

d) Dans cet exemple : $a_1 = 1, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{5}{3}$ et $a = \frac{4}{3}$.

D'où, $b_{1,1} = \frac{1}{2}(1 + 1 - \frac{4}{3}) = \frac{1}{3}, b_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + \frac{4}{3} - 1 - \frac{4}{3}) = 0, b_{1,3} = \frac{1}{2}(1 + \frac{5}{3} - 2 - \frac{4}{3}) = -\frac{1}{3}$, de même $b_{2,2} = \frac{2}{3}, b_{2,3} = -\frac{2}{3}$ et $b_{3,3} = 1$.

$$\text{D'où } \Phi(A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. a) Puisque $A \in \ker(\Phi)$, en reprenant les notations de la question précédente, on a en particulier $b_{i,i} = 0$, donc $2a_i - a = 0$ i.e. $a_i = \frac{a}{2}$.

b) Or $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$, d'où $a = \frac{a}{2}$ i.e. $a = 0$. Sachant que les $b_{i,j}$ sont nuls, en reprenant la relation de la question précédente, puisque $a = 0$, les a_i sont aussi nuls, on en déduit que $a_{i,j}$ est nuls. Donc A est la matrice nulle.

c) Le noyau de Φ est donc réduit à la matrice nulle, ceci prouve que Φ est injective.

7. a) Soit $B \in \text{Im}(\Phi)$, il existe $A \in \mathcal{H}_n$ telle que $B = -\frac{1}{2}H_n A H_n$. D'où $B U_n = -\frac{1}{2}H_n A H_n U_n$. H_n étant le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(U_n)^\perp$, $H_n U_n = 0$ d'où $B U_n = 0$ i.e. $B \in \mathcal{K}_n$ d'où $\text{Im}(\Phi) \subset \mathcal{K}_n$.

b) Si M est diagonale, d'éléments diagonaux d_1, \dots, d_n , alors $M U_n = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$. D'où $M \in \mathcal{K}_n$ ssi $d_1 = \dots = d_n = 0$ i.e. M est la matrice nulle. On a bien $\mathcal{K}_n \cap \mathcal{D}_n = \{0\}$ i.e. ces deux s.e.v. sont en somme directe.

c) Ainsi $\dim(\mathcal{K}_n \oplus \mathcal{D}_n) = \dim(\mathcal{K}_n) + n$ et $\mathcal{K}_n \oplus \mathcal{D}_n$ est un s.e.v. de \mathcal{S}_n de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

D'où $\dim(\mathcal{K}_n) \leq \frac{n(n+1)}{2} - n$ i.e. $\dim(\mathcal{K}_n) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Or par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(\Phi)) = \frac{n(n-1)}{2}$, et $\text{Im}(\Phi) \subset \mathcal{K}_n$, donc $\dim(\mathcal{K}_n) \geq \frac{n(n-1)}{2}$, d'où le résultat.

On en déduit l'égalité demandée puisque $\text{Im}(\Phi)$ et \mathcal{K}_n sont de même dimension et que $\text{Im}(\Phi) \subset \mathcal{K}_n$.

Partie II - Propriétés des matrices euclidiennes

8. On trouve que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Phi(A) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

La méthode du pivot donne le spectre de cette matrice : $\{1, \frac{1}{3}, 0\}$.

9. a) Soit E_1, \dots, E_n la base canonique de \mathbb{R}^n . On a, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j, \|E_i - E_j\|^2 = 2$ d'où en posant $X_i = \frac{1}{\sqrt{2}}E_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a bien pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j, \|X_i - X_j\|^2 = 1$. Donc $A \in \mathcal{E}_{n,n}$.

b) On a pour tout $i, a_i = \frac{n-1}{n} = a$.

D'où si $i \neq j, b_{i,j} = -\frac{1}{2}(\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} - 1 - \frac{n-1}{n}) = -\frac{1}{2n}$ et $b_{i,i} = -\frac{1}{2}(\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n}) = \frac{n-1}{2n}$.

c) On a bien que $\Phi(A) = \frac{1}{2}H_n$, d'où $\text{rg}(\Phi(A)) = \text{rg}(H_n) = n - 1$ et H_n étant un projecteur non trivial, $\text{Sp}(H_n) = \{0, 1\}$ d'où $\text{Sp}(\Phi(A)) = \{0, \frac{1}{2}\}$.

10. Si $k \geq p$, en ajoutant à chaque X_i $k - p$ composantes égales à 0, on obtient un vecteur de \mathbb{R}^k et on a pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\|X'_i - X'_j\|^2 = \|X_i - X_j\|^2$, ce qui prouve que X'_1, \dots, X'_n est associée à A , d'où $A \in \mathcal{E}_{n,k}$.

11. a) Immédiat.

b) Il suffit de prendre $Y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

c) On utilise les célèbres identités remarquables : $a_{i,j} = \|X_i - X_j\|^2 = \|X_i\|^2 + \|X_j\|^2 - 2 {}^t X_i X_j$.
D'où :

$$a_i = \frac{1}{n} \left(n \|X_i\|^2 + \sum_{j=1}^n \|X_j\|^2 - 2 \sum_{j=1}^n {}^t X_i X_j \right)$$

Par linéarité du produit scalaire : $\sum_{j=1}^n {}^t X_i X_j = {}^t X_i \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) = 0$. Ainsi $a_i = \|X_i\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|X_j\|^2$.

De plus $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\|X_i\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|X_j\|^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|X_j\|^2$, d'où $a = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \|X_j\|^2$.

d) On a vu dans la question 5.c) que : $b_{i,j} = \frac{1}{2}(a_i + a_j - a_{i,j} - a)$. D'où :

$$b_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\|X_i\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|X_k\|^2 + \|X_j\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|X_k\|^2 - \|X_i - X_j\|^2 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \|X_k\|^2 \right)$$

Il reste : $b_{i,j} = \frac{1}{2} (\|X_i\|^2 + \|X_j\|^2 - \|X_i - X_j\|^2)$. Une des non moins célèbres identités de polarisation donne le résultat : $b_{i,j} = {}^t X_i X_j$.

Les colonnes de X sont X_1, \dots, X_n alors les lignes de ${}^t X$ sont ${}^t X_1, \dots, {}^t X_n$. Ainsi l'élément générique de ${}^t X X$ vaut ${}^t X_i X_j$ ce qui prouve que $\Phi(A) = {}^t X X$.

e) Montrons que $\ker(\Phi(A)) = \ker(X)$.

On a classiquement $\ker(X) \subset \ker(\Phi(A))$.

Réciproquement, si $V \in \ker(\Phi(A))$, alors ${}^t X X V = 0$ d'où ${}^t V {}^t X X V = 0$ i.e. $\|XV\|^2 = 0$ donc $XV = 0$ soit $V \in \ker(X)$. On a donc l'égalité par double inclusion.

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(X) = n - \dim(\ker(X)) = n - \dim(\ker(\Phi(A))) = \text{rg}(\Phi(A))$, cdfd.

Les vecteurs X_1, \dots, X_n étant dans \mathbb{R}^p , le rang de (X_1, \dots, X_n) est inférieur à p d'où $\text{rg}(X) \leq p$ i.e. $\text{rg}(\Phi(A)) \leq p$.

12. On a vu que $\text{Im}(\Phi) = \mathcal{K}_n$ d'où $\Phi(A)U_n = 0$ et ainsi 0 est bien une valeur de $\Phi(A)$.

De plus, si $\lambda \in \text{Sp}(\Phi(A))$, il existe $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Phi(A)V = \lambda V$, d'où ${}^t V {}^t X X V = \lambda {}^t V V = \lambda \|V\|^2$, i.e. $\|XV\|^2 = \lambda \underbrace{\|V\|^2}_{\neq 0}$ soit $\lambda = \frac{\|XV\|^2}{\|V\|^2}$. Ceci prouve bien que $\lambda \geq 0$.

Partie III - Caractérisation de Schönberg-Young-Householder des matrices euclidiennes

13. a) G étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

On construit une base orthonormée de vecteurs propres en plaçant les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles en premier et ensuite ceux associés à la valeur propre 0. Le noyau de G étant de dimension $n - p$, il y a p vecteurs associés aux valeurs propres non nulles et $n - p$ à la valeurs propre 0.

Soit la matrice P dont les colonnes sont formées de ces vecteurs propres.

Alors $P^{-1}GP$ est diagonale avec ses p premiers coefficients qui sont strictement positifs, donc que l'on

peut noter $\alpha_1^2, \dots, \alpha_p^2$ et les autres qui sont nuls. En posant $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_p & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien

$${}^tPGP = \Delta^2 \text{ d'où } G = P\Delta^2({}^tP).$$

b) La ligne numéro i de $\Delta({}^tP)$ est égale à la ligne i de Δ multipliée par tP . Or les $n - p$ dernières lignes de Δ sont nulles, d'où les $n - p$ dernière lignes de $\Delta({}^tP)$ sont nulles.

c) Notons $m_{i,j}$ les coefficients de $\Delta({}^tP)$. L'élément générique de G égal à $\sum_{k=1}^n m_{k,i}m_{k,j} = \sum_{k=1}^p m_{k,i}m_{k,j} =$

$(m_{1,i} \dots m_{p,i}) \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{p,j} \end{pmatrix}$ ce qui correspond à bien l'élément générique de tXX , d'où l'égalité annoncée.

14. a) Sans difficulté.

b) On remarque que $\sum_{k=1}^n X_k = XU_n$. D'où $\|\sum_{k=1}^n X_k\|^2 = {}^t(XU_n)XU_n = {}^tU_n {}^tXXU_n = {}^tU_n GU_n = 0$, d'où

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0.$$

c) Si l'on note A' la matrice euclidienne associée à X_1, \dots, X_n , on a puisque $\sum_{k=1}^n X_k = 0$, d'après la partie 2, $\Phi(A')$ est d'élément générique tX_iX_j . Ainsi $\Phi(A') = G$ et Φ étant injective $A' = A$. cqfd.

15. a) • On a vu dans la partie 2, question 12, que si $A \in \mathcal{E}_n$ alors $\text{Sp}(\Phi(A)) \subset \mathbb{R}^+$.

• Dans les questions 13 et 14 que si A n'est pas la matrice nulle et $\text{Sp}(\Phi(A)) \subset \mathbb{R}^+$ alors $A \in \mathcal{E}_n$. Si A est la matrice nulle, elle appartient bien à \mathcal{E}_n .

On a bien l'équivalence.

Si $A \in \mathcal{E}_n$ n'est pas la matrice nulle et $p = \text{rg}(\Phi(A))$ alors on a vu que que $A \in \mathcal{E}_{n,p}$ dans les questions 13 et 14.

Et on a vu dans la partie 2, que si $A \in \mathcal{E}_{n,k}$ alors $k \geq \text{rg}(\Phi(A))$. D'où $\text{rg}(\Phi(A)) = \min\{k \in \mathbb{N}^* / A \in \mathcal{E}_{n,k}\}$.

b) Trivialement la matrice nulle appartient à $\mathcal{E}_{n,n-1}$.

Si $A \in \mathcal{E}_n$ et n'est pas la matrice nulle alors, d'après les questions précédentes, $A \in \mathcal{E}_{n,\text{rg}(\Phi(A))}$ et $\text{rg}(\Phi(A)) \leq n - 1$, d'où $A \in \mathcal{E}_{n,n-1}$ d'après la question 10. D'où l'égalité.

c) D'après la question 9, la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls, appartient à $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n,n-1}$.

Donc il existe n vecteurs X_1, \dots, X_n de \mathbb{R}^{n-1} tel que pour $i \neq j$, $\|X_i - X_j\|^2 = 1$.

S'il existe m vecteurs de \mathbb{R}^{n-1} vérifiant cette propriété, alors la matrice A associée est euclidienne de type $(m, n - 1)$, d'où $\text{rg}(\Phi(A)) \leq n - 1$ i.e. $m - 1 \leq n - 1$ d'où $m \leq n$, ce qui prouve le résultat annoncé.

16. L'expression est la suivante : $\min(\text{al.eig}(\Phi(A)) [0]) >= 0$.

17. Un grand classique :

• Montrons que la condition est nécessaire. Si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$, alors il existe une matrice orthogonale P

et une matrice diagonale D à coefficients positifs telles que $M = PD^tP$. D'où ${}^tXMX = {}^tXPD^tPX$. On pose $Y = {}^tPX$ et on note y_1, \dots, y_n les coefficients de Y et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les éléments diagonaux de D , ${}^tXMX = {}^tYDY = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k^2$. D'où ${}^tXMX \geq 0$.

• Réciproquement, si α est une valeur propre de M et X un vecteur propre, ${}^tXMX = {}^tX(\alpha X) = \alpha \|X\|^2$. D'où $\alpha = \frac{{}^tXMX}{\|X\|^2}$, et ainsi $\alpha \geq 0$.

La suite s'en déduit facilement.

18. a) D'après la question 5.d), $\Phi(A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. D'où ${}^tX\Phi(A)X = \frac{1}{3} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} x-z \\ 2y-2z \\ -x-2y+3z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (x^2 - xz + 2y^2 - 2yz - zx - 2zy + 3z^2) = \frac{1}{3} (x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 4zy)$.

b) On a alors ${}^tX\Phi(A)X = \frac{1}{3} (x^2 - 2xz + z^2 + 2(y^2 - 2yz + z^2)) = \frac{1}{3} ((x-z)^2 + 2(y-z)^2)$, d'où ${}^tX\Phi(A)X \geq 0$ pour tout X . A est bien euclidienne.

Partie IV - Une condition nécessaire et une condition suffisante utilisant la trace

19. a) On a $\text{Tr}(M) = \sum_{k=1}^r \lambda_k = {}^tU_r \Lambda$, d'où $m = \frac{1}{r} {}^tU_r \Lambda$.

M^2 est semblable à la matrice diagonale dont les valeurs non nulles sont $\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2$. Ainsi $\text{Tr}(M^2) = \sum_{k=1}^r \lambda_k^2$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^r aux vecteurs Λ et U_r , on a ainsi :

$$({}^tU_r \Lambda)^2 \leq \|U_r\|^2 \|\Lambda\|^2 = r \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k^2 \right) \text{ d'où } m^2 \leq \frac{\text{Tr}(M^2)}{r}$$

Ainsi $\frac{\text{Tr}(M^2)}{r} - m^2 \geq 0$ ce qui justifie la définition de s .

b) On a, ${}^t\Lambda H_r \Lambda = \|\Lambda\|^2 - \frac{1}{r} ({}^t\Lambda U_r)^2 = \text{Tr}(M^2) - \frac{1}{r} ({}^t\Lambda U_r)^2$, d'où

$$\frac{1}{r} {}^t\Lambda H_r \Lambda = \frac{1}{r} \text{Tr}(M^2) - \left(\frac{{}^t\Lambda U_r}{r} \right)^2 = \frac{1}{r} \text{Tr}(M^2) - m^2 = s^2.$$

c) On applique Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^r aux vecteurs $H_r Y$ et $H_r \Lambda$:

$$\left| {}^t(H_r Y) H_r \Lambda \right| \leq \|H_r Y\| \|H_r \Lambda\|$$

Or ${}^t(H_r Y) H_r \Lambda = {}^tY {}^tH_r H_r \Lambda = {}^tY H_r^2 \Lambda = {}^tY H_r \Lambda$.

De même, $\|H_r Y\| = \sqrt{{}^t(H_r Y) H_r Y} = \sqrt{{}^tY H_r Y}$ et $\|H_r \Lambda\| = \sqrt{{}^t(H_r \Lambda) H_r \Lambda} = \sqrt{{}^t\Lambda H_r \Lambda}$ ce qui permet de conclure.

Ainsi $-\sqrt{{}^tY H_r Y} \sqrt{{}^t\Lambda H_r \Lambda} \leq {}^tY H_r \Lambda \leq \sqrt{{}^tY H_r Y} \sqrt{{}^t\Lambda H_r \Lambda}$, d'où

$$-\sqrt{{}^tY H_r Y} \sqrt{rs^2} \leq {}^tY H_r \Lambda \leq \sqrt{{}^tY H_r Y} \sqrt{rs^2} \text{ d'où } -s\sqrt{r} \sqrt{{}^tY H_r Y} \leq {}^tY H_r \Lambda \leq s\sqrt{r} \sqrt{{}^tY H_r Y}.$$

d) $H_r Y$ est la dernière colonne de H_r soit $\begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \\ \vdots \\ -\frac{1}{r} \\ 1 - \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ d'où ${}^t Y H_r Y = 1 - \frac{1}{r} = \frac{r-1}{r}$.

${}^t Y H_r \Lambda$ est la dernière ligne de H_r soit $\left(-\frac{1}{r} \dots -\frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{r}\right)$ d'où ${}^t Y H_r \Lambda = -\frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \lambda_r = \lambda_r - m$.

On a donc : $-s\sqrt{r} \sqrt{\frac{r-1}{r}} \leq \lambda_r - m \leq s\sqrt{r} \sqrt{\frac{r-1}{r}}$ d'où $\lambda_r \geq m - s\sqrt{r-1}$.

e) On a $r^2(m - \lambda_r)^2 = \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k - r\lambda_r\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)\right)^2$. Or pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\lambda_k - \lambda_r \geq 0$ et $\left(\sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)\right)^2 = \sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)^2 + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_i - \lambda_r)(\lambda_j - \lambda_r)}_{\geq 0}$, d'où $\left(\sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)\right)^2 \geq \sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)^2$ et ainsi

$$r^2(m - \lambda_r)^2 \geq \sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)^2$$

De plus, $\sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)^2 = \sum_{k=1}^r \lambda_k^2 - 2\lambda_r \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k\right) + r\lambda_r^2 = \text{Tr}(M^2) - 2r\lambda_r m + r\lambda_r^2$, d'où :

$$\sum_{k=1}^r (\lambda_k - \lambda_r)^2 = r \left(\frac{\text{Tr}(M^2)}{r} - 2\lambda_r m + \lambda_r^2 \right) = r (s^2 + m^2 - 2\lambda_r m + \lambda_r^2) = rs^2 + r(m - \lambda_r)^2$$

On a alors $r^2(m - \lambda_r)^2 \geq rs^2 + r(m - \lambda_r)^2$, d'où $(r-1)(m - \lambda_r)^2 \geq s^2$.

$m \geq \lambda_r$, en prenant la racine carrée de l'inégalité précédente :

$$\sqrt{r-1}(m - \lambda_r) \geq s \text{ d'où } m - \frac{s}{\sqrt{r-1}} \geq \lambda_r$$

20. a) D'après les propriétés de la trace et le fait que $H_n^2 = H_n$, $m = \frac{1}{r} \text{Tr}(-H_n A H_n) = \frac{1}{r} (-\text{Tr}(A H_n)) = \frac{1}{r} \left(-\underbrace{\text{Tr}(A)}_{=0} + \frac{1}{n} \text{Tr}(A U_n {}^t U_n) \right) = \frac{1}{nr} \text{Tr}(\underbrace{{}^t U_n A U_n}_{\in \mathbb{R}})$. Donc $m = \frac{1}{nr} {}^t U_n A U_n$.

De même :

$$s^2 = \frac{1}{r} \text{Tr}(H_n A H_n A H_n) - m^2 = \frac{1}{r} \text{Tr}((A H_n)^2) - m^2$$

Or $(A H_n)^2 = \left(A - \frac{1}{n} A U_n {}^t U_n\right)^2 = A^2 - \frac{1}{n} A^2 U_n {}^t U_n - \frac{1}{n} A U_n {}^t U_n A + \frac{1}{n^2} A U_n {}^t U_n A U_n {}^t U_n$.

De plus,

- $\text{Tr}(A^2 U_n {}^t U_n) = \text{Tr}({}^t U_n A^2 U_n) = {}^t U_n A^2 U_n$ et $\text{Tr}(A U_n {}^t U_n A) = \text{Tr}(A^2 U_n {}^t U_n) = {}^t U_n A^2 U_n$.
- $\text{Tr}(A U_n {}^t U_n A U_n {}^t U_n) = \text{Tr}(({}^t U_n A U_n)^2) = ({}^t U_n A U_n)^2 = n^2 r^2 m^2$.

D'où $s^2 = \frac{1}{r}(\text{Tr}(A^2) - \frac{2}{n} {}^tU_n A^2 U_n + r^2 m^2) - m^2 = \frac{1}{r} \text{Tr}(A^2) - \frac{2}{nr} {}^tU_n A^2 U_n + (r-1)m^2.$

b) On a $(r-1)(m-\lambda_r)^2 \leq (r-1)m^2$ d'où d'après la question 19.e), $s^2 \leq (r-1)m^2$ d'où $\frac{1}{r}(\text{Tr}(A^2) - \frac{2}{nr} {}^tU_n A^2 U_n) \leq 0$ donc $\text{Tr}(A^2) \leq \frac{2}{n} {}^tU_n A^2 U_n$.

c) Si l'inégalité est vérifiée, $s^2 \leq -\frac{n-3}{rn^2(n-2)} ({}^tU_n A U_n)^2 + (r-1)m^2$, d'où $s^2 \leq \left(\frac{n-3}{rn^2(n-2)} r^2 n^2 + (r-1) \right) m^2$, donc $s^2 \leq \left(-\frac{n-3}{n-2} r + (r-1) \right) m^2$ puis $(r-1)s^2 \leq \left(-\frac{(n-3)(r-1)}{n-2} r + (r-1)^2 \right) m^2$.

Or on sait que $r \leq n-1$, d'où on en déduit que $\frac{(n-3)(r-1)}{n-2} \geq r-2$ car $(n-3)(r-1) - (n-2)(r-2) = n-1-r$ et ainsi $-\frac{(n-3)(r-1)}{n-2} r + (r-1)^2 \leq -(r-2)r + (r-1)^2$ qui vaut 1.

Donc $(r-1)s^2 \leq m^2$ i.e. $\sqrt{r-1}s \leq m$. L'inégalité de la question 19.d) montre que $\lambda_r \geq 0$ ce qui prouve que A est euclidienne.

21. a) D'après la question 20.b), cette condition est nécessaire si A n'est pas la matrice nulle et est vérifiée par la matrice nulle. Elle est suffisante d'après la question 20.c) pour $n=3$ puisque $n-3=0$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+1 & 1 & a \\ 1 & a^2+1 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}, \text{Tr}(A^2) = 2a^2+4, \frac{2}{3} {}^tU_3 A^2 U_3 = \frac{2}{3}(2a^2+4a+6) = \frac{4}{3}a^2 + \frac{8}{3}a + 4.$$

D'où A est euclidienne ssi $-\frac{2}{3}a^2 + \frac{8}{3}a \geq 0$ i.e. $a(4-a) \geq 0$ i.e. $a \in [0,4]$.

b) Un calcul rapide montre que ${}^tU_n A U_n = n(n-1)$. $A^2 = \begin{pmatrix} (n-1) & (n-2) & \dots & \dots & (n-2) \\ (n-2) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & (n-2) \\ (n-2) & \dots & \dots & (n-2) & (n-1) \end{pmatrix}$ d'où

$\text{Tr}(A^2) = n(n-1)$ et ${}^tU_n A^2 U_n = n(n-1) + n(n-1)(n-2) = n(n-1)^2$. D'où :

$$\frac{2}{n} {}^tU_n A^2 U_n - \frac{n-3}{n^2(n-2)} ({}^tU_n A U_n)^2 = 2(n-1)^2 - \frac{n-3}{n^2(n-2)} n^2 (n-1)^2 = (n-1)^2 \frac{n-1}{n-2}$$

On vérifie que l'on a bien $\frac{(n-1)^3}{n-2} \geq n(n-1)$ ce qui prouve le résultat attendu.

22. Le script :

```
def CsEuclidienne(A):
    n=np.shape(A)[0]
    A2=np.dot(A,A)
    return 2/n*np.sum(A2)-(n-3)/(n**2*(n-2))*(np.sum(A)**2)-np.trace(A2)>=0
```